الرياضيات البحتة

الجزء الخاص بالإجابات

2022

الجبر و الهندسة الفراغية

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

3 ثانوى

إجابات تمارين

محور 1

التباديل والتوافيق
و نظرية ذات الحدين

إجابات تمارين 1

1

(1) (هـ) (2) (د) (3) (ب) (4) (أ) (5) (أ)
(6) (هـ) (7) (ب) (8) (هـ) (9) (هـ) (10) (ب)
(11) (د) (12) (هـ) (13) (هـ) (14) (هـ) (15) (أ)
(16) (د) (17) (ب) (18) (ب) (19) (د) (20) (د)
(21) (أ) (22) (د) (23) (هـ) (24) (أ) (25) (ب)
(26) (ب) (27) (هـ) (28) (أ) (29) (هـ) (30) (هـ)
(31) (أ) (32) (أ) (33) (د) (34) (د) (35) (هـ)
(36) (أ) (37) (د)

2

(1) $ن_{ر}^{ر} = ١٠$ (2) $ل_{ن}^{٢} = ٦٠$
(3) $ن_{٥}^{٣} = ١٢٥$ (4) $٣ \times ٤ \times ٣ = ٣٦$
(5) $١ \times ٣ \times ٣ \times ١ \times ٢ \times ٣ = ١٥$

3

(1) $٢ \times ٥ \times ٣ \times ٢ \times ٥ \times ٥ = ٤٠٠$
$٢ \times ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ = ١٥٢٠$
(2) $١ \times ٢ \times ٣ \times ١ \times ٣ \times ٢ = ١١١$
$٢ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ٢ \times ٣ \times ١ \times ٢ \times ٣ = ١$

4

(1) $ل_{ن}^{٢} = ٢٤$ (2) $ل_{ن}^{٢} + ل_{ن}^{٢} = ٤٨$
(3) $ل_{ن}^{٢} + ل_{ن}^{٢} + ل_{ن}^{٢} = ٤٠$

5

عدد الأعداد $= ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٣٦٠ = ل_{ن}^{٤}$
عدد الأعداد التى تقبل القسمة على $٥ = ١ \times ٥ = ٦٠ = ل_{ن}^{٢}$
عدد الأعداد الزوجية $= ٣ \times ٦٠ = ١٨٠ = ل_{ن}^{٢}$

6

(1) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ٤٠٠$ (2) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ١٤٠٠$
(3) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ٤٠٠$ (4) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ١٤٠٠$
(5) $ن_{٥}^{٢} = ١٥$
(6) نضع كرة فى كل صندوق ثم نوزع باقى الكرات
فيكون عدد الطرق $= ن_{٢}^{٢} = ٢١$
(7) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} \times ن_{٢}^{٣} = ٢٥٢$
(8) (أ) • إذا كانت الأماكن متتالية $= ١ \times ل_{ن}^{٤} = ٢٤$
• إذا جلست الأماكن متفاصلة $= ل_{ن}^{٤} = ٢٤$
(ب) $٧ \times ل_{ن}^{٤} = ١٦٨$

7

(1) $ن_{٥}^{٢} = ٢٠$ (2) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ٩٢٠$
(3) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} \times ن_{٢}^{٣} = ١٦٠$
(4) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} \times ن_{٢}^{٣} = ١٦٠$

8

(1) $ن_{١٠}^{١٤} = ١٨٥٦٤$ (2) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ٢٣٨٠$
(3) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ٥٨٨٠$
(4) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} \times ن_{٢}^{٣} \times ن_{٢}^{٣} = ٩٠٢٠$

9

(1) $ن_{١٠}^{١٢} = ١٩٥$
(2) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ٢٥٢$
(3) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} \times ن_{٢}^{٣} \times ن_{٢}^{٣} \times ن_{٢}^{٣}$
$= ٢٦٩$

10

$ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} \times ن_{٢}^{٣} = ٢٩$

11

$ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} \times ن_{٢}^{٣} \times ن_{٢}^{٣} = ٦$

12

(1) $٢٤ \times ٣ \times ٨ = ٥٩٢$
(2) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ٧٣٩٢$
(3) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ٦١٦$

13

(1) $ن_{٥}^{٢} = ٤$ (2) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ١٠$ (3) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ٢٠$

14

(1) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ٩٠٦$ (2) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ٨٠٢$
(3) $ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} = ٥١٢$

15

لرسم المثلث يمكن اختيار نقطة
واحدة من ل
واختيار نقطتين من ل أو العكس

∴ عدد المثلثات $= ن_{٥}^{٢} \times ن_{٢}^{٣} \times ن_{٢}^{٣} = ٣٠$

حل آخر :
اختيار ثلاثة فقط من ٧ نقاط بشرط أن تكون النقاط
ليست على استقامة واحدة
أى عدد المثلثات $= ن_{٥}^{٢} - ن_{٢}^{٣} - ن_{٢}^{٣} = ٣٠$

16

(1) (أ) (2) (أ) (3) (هـ)
(4) (د) (5) (ب) (6) (د)
(7) أولًا : (أ) ثانيًا : (د) ثالثًا : (هـ)

إرشادات لحل المثال 16

① • إذا اختير العدد صفر فى خانة الآحاد ، ٦ أو ٧
فى خانة المئات
∴ عدد طرق تكوين العدد $= ١ \times ٢ \times ٣ = ٦$ طرق
• إذا اختير العدد ٢ فى خانة الآحاد ، ٦ أو ٧ فى
خانة المئات
∴ عدد طرق تكوين العدد $= ١ \times ٢ \times ٢ = ٤$ طرق
• إذا اختير العدد ٦ فى خانة الآحاد ، ٧ فى خانة
المئات
∴ عدد طرق تكوين العدد $= ١ \times ٣ \times ١ = ٣$ طرق
∴ عدد طرق تكوين العدد الزوجى الأكبر من ٥٠٠
ويكون من ٣ أرقام مختلفة $= ٦ \times ٥ \times ٢ = ١٥٠$ طريقة
② الحالة الأولى : العدد مكون من الأرقام
٥ ، ٢ ، ١
∴ عدد الطرق $= ٤ \times ٣ = ١٢$ طريقة
الحالة الثانية : العدد مكون من الأرقام
٥ ، ٤ ، ٢ ، ١
∴ عدد الطرق $= ٤ \times ٣ = ٩٦$ طريقة
∴ عدد طرق تكوين العدد $= ١٢٠ + ٩٦$
$= ٢١٦$ طريقة
③ نفرض أن عدد أضلاع المضلع $= ن$ ضلعًا
$\therefore ن_{٥}^{٢} = ن \Leftarrow \frac{ن(ن-٣)}{٢} = ٢ن$
$\therefore ن^{٢} - ٦ن = ٠ \Leftarrow ن^{٢} = ٦ن$
$\therefore ن(ن - ٦) = ٠ \Leftarrow ن = ٠$ (مرفوض) أو $ن = ٦$
$\therefore ن = ٦$
∴ عدد الأضلاع $= ٧$ أضلاع
④ عدد طرق جلوس ١ أولاد $= ٢!$
، عدد طرق جلوس ٣ بنات $= ٣!$
، عدد طرق تبديل الأولاد مع البنات $= ٢!$
∴ عدد الطرق $= ٢ \times ٣! \times ٢! = ٢٨٨$

١ أولاد	٢ بنات	أو	٢ بنات	١ أولاد

⑤ ∵ عدد طرق اختيار صورة كل عنصر من عناصر
$ص = ٢$ (أ أو ب)
∴ عدد الدوال الممكنة من ص إلى ص $= ٢^{٣}$
$= ٨$

إجابات تمارين 2

1

(1) (ب) (2) (هـ) (3) (هـ) (4) (أ) (5) (هـ)
(6) (ب) (7) (ب) (8) (هـ) (9) (أ) (10) (هـ)
(11) (ب) (12) (هـ) (13) (هـ) (14) (هـ) (15) (هـ)
(16) (ب) (17) لو (18) (ب) (19) (أ) (20) (ب)
(21) (د)

2

(1) $\frac{ن!}{(ن-٢)!} = ٢٠ \Leftarrow ن(ن-١) = ٢٠$ ويمثلها $ن = ٥$
$\therefore ن - ٢ = ٣$ ويمثلها $ن = ٥$
(2) $\frac{(ن-١)!}{٢!} = ٢١ \Leftarrow (ن-١)! = ٤٢$
$\therefore ن = ٦$
(3) $\frac{ن!}{(ن-٢)!} = ٩٠ \Leftarrow ن(ن-١) = ٩٠$
$\therefore ن = ١٠$

(4) $\frac{ن!}{(ن-٢)!} = ٢ن \Leftarrow ن(ن-١) = ٢ن$
$\therefore ن^{٢} - ٣ن = ٠ \Leftarrow ن(ن-٣) = ٠$
$\therefore ن = ٠$ (مرفوض) أو $ن = ٣$
$\therefore ن = ٣$
(5) $\frac{ن!}{٢!(ن-٢)!} = ٦ \Leftarrow \frac{ن(ن-١)}{٢} = ٦$
$\therefore ن^{٢} - ن = ١٢ \Leftarrow ن^{٢} - ن - ١٢ = ٠$
$\therefore (ن-٤)(ن+٣) = ٠ \Leftarrow ن = ٤$ أو $ن = -٣$ (مرفوض)
$\therefore ن = ٤$
(6) $ل_{ن}^{٢} = ٢ل_{ن}^{٢} \Leftarrow \frac{ن!}{(ن-٢)!} = ٢ \times \frac{ن!}{(ن-٢)!}$
$\therefore ن(ن-١) = ٢(ن-١)(ن-٢) \Leftarrow ن = ٢$
$\therefore ن = ٢$
(7) $\frac{ن!}{٢!} = \frac{ن!}{(ن-٢)!} \Leftarrow ل_{ن}^{٢} = ٢!ن_{٢}^{٢}$
$\therefore ن = ٢$
(8) $ل_{ن}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٤$
(9) $ل_{ن}^{٢} = ٦٦ \Leftarrow ن = ١٢$
(10) $ن_{٥}^{٢} = ٩٥٢ \Leftarrow ن = ٨$
(11) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٤$
(12) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٩$
(13) $ن_{٥}^{٢} = ٦٦ \Leftarrow ن = ١١$
(14) $ن_{٥}^{٢} = ١٢ \Leftarrow ن = ٤$
(15) $ن_{٥}^{٢} = ١٢ \Leftarrow ن = ٤$
(16) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٩$
(17) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(18) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(19) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(20) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(21) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(22) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(23) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(24) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(25) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(26) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(27) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(28) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(29) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(30) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(31) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(32) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(33) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(34) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(35) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(36) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(37) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(38) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(39) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(40) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(41) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(42) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(43) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(44) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(45) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(46) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(47) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(48) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(49) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(50) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(51) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(52) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(53) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(54) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(55) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(56) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(57) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(58) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(59) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(60) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(61) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(62) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(63) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(64) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(65) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(66) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(67) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(68) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(69) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(70) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(71) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(72) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(73) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(74) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(75) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(76) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(77) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(78) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(79) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(80) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(81) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(82) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(83) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(84) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(85) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(86) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(87) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(88) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(89) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(90) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(91) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(92) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(93) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(94) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(95) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(96) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(97) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(98) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(99) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(100) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(101) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(102) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(103) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(104) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(105) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(106) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(107) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(108) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(109) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(110) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(111) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(112) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(113) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(114) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(115) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(116) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(117) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(118) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(119) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(120) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(121) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(122) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(123) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(124) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(125) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(126) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(127) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(128) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(129) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(130) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(131) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(132) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(133) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(134) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(135) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(136) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(137) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(138) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(139) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(140) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(141) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(142) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(143) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(144) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(145) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(146) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(147) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(148) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(149) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(150) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(151) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(152) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(153) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(154) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(155) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(156) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(157) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(158) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(159) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(160) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(161) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(162) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(163) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(164) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(165) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(166) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(167) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(168) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(169) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(170) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(171) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(172) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(173) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(174) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(175) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(176) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(177) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(178) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(179) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(180) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(181) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(182) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(183) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(184) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(185) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(186) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(187) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(188) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(189) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(190) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(191) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(192) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(193) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(194) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(195) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(196) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(197) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(198) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(199) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$
(200) $ن_{٥}^{٢} = ٢ن \Leftarrow ن = ٦$

⑭ ∵ $ل_{ن-٢}$ = ٦

∴ $ل_{ن-٢}$ = $ل_{ن}$ ، أو $ل_{ن}$ = $ل_{ن+٢}$

∴ أساسها = ١

∴ $ل_{ن-٣}$ = $ل_{ن}$ ، يسبقها ن = ٣

أ، $ل_{ن-٣}$ = $ل_{ن}$ ، يسبقها ن = ٨

⑮ ∵ $ل_{ن+٢}$ = $ل_{ن}$

∴ ن + ٢ = ٢ ، ن = صفر ∴ ٢ ن = صفر

∴ ن = صفر أ، ن + ٢ + ٢ ن = ٤

∴ ٤ = ٤ أى أنها متحققه لجميع قيم ن

بحيث ن + ٢ ≥ ٤ ، ٢ ن ≥ ٤

∴ ن ≥ ٢ ، ن ≤ ٢

أى أن : ن ∈ {٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢}

٣

① ∵ $ل_{٩}$ = ٢ = $ل_{٤}$ ∴ ن = ٢

∴ $ل_{ن+٢}$ = ٩٠

∴ $ل_{ن+٢}$ = $ل_{١٠}$

∴ ن + ٢ = ١٠ ∴ ن = ٨

② ∵ $ل_{ن}$ = ١٢٠ = $ل_{٥}$ ∴ ن = ٥

∴ $ل_{ن}$ = ٢٥٢٠

∴ $ل_{٥}$ = ٢٥٢٠ = $ل_{٧}$ ∴ ن = ٧

∴ $\frac{ل_{٣}}{ل_{ن-٢}}$ = $\frac{ل_{٥}}{ل_{٧}}$ = $\frac{٢٥ - ١٤}{٢ - ٧}$ = $\frac{١١}{-٥}$ = ١

③ ∵ $\frac{ل_{٥}}{ل_{٤}}$ = ٢١ ∴ $\frac{ل_{ن}}{ل_{٣}}$ = ٢١

∴ $ل_{ن}$ = ٢١ × $ل_{٣}$ = ٤٢ = ٧ × ٦ = $ل_{٧}$

∴ ن = ٧ ، ∴ $ل_{ن+٧}$ = $ل_{١٤}$ = ٩٩٠

∴ $ل_{١٤}$ = ١١ × ١٠ × ٩ = $ل_{١١}$

∴ ٧ + ص = ١١ ∴ ص = ٤

④ ∵ $ل_{ن}$ = ٥ ن

∴ $\frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١}$ = ٥ ن

∴ (ن - ١) (ن - ٢) = ٥ × ٦

∴ ن = ٧ ∴ ن - ١ = ٦

∴ $ل_{ن-١}$ = $ل_{٦}$ = ٧

⑤ ∵ $\frac{ن-٤}{ن-٢}$ = ٢ = $\frac{٦}{٣}$ ∴ ن - ٤ = ٦ ، ن - ٢ = ٣

∴ ن = ١٠ ، ص = ٣

∴ $ل_{ن-٤}$ = $ل_{٦}$ = $ل_{ص}$ ∴ ن = ص = ٣

∴ ن - ٤ = ٣ ، $ل_{ن-٤}$ = $ل_{٣}$

∴ $ل_{١٠}$ = $ل_{٣}$ ، $ل_{ن}$ = $ل_{ص}$

∴ $ل_{١٠}$ = ٢١٠ = $ل_{ن}$

∴ $ل_{١٠}$ = ٢١٠ = $ل_{ن}$

∴ ن = ٧

٤

① ∵ $ل_{ن}$ = ١٢٠

∴ $ل_{ن}$ = ١٢٠ = $ل_{١٦}$

∴ ن = ١٢٠ ، ص = ١

أ، $ل_{ن}$ = ١٢٠ = $ل_{٣}$ ∴ ن = ٦ ، ص = ٣

أ، $ل_{ن}$ = ١٢٠ = $ل_{٥}$ ∴ ن = ٥ ، ص = ٤

أ، $ل_{ن}$ = ١٢٠ = $ل_{٥}$

∴ ن = ٥ ، ص = ٥

② ∵ $ل_{ن}$ > $ل_{١٥}$ ∴ $\frac{ل_{ن}}{ل_{ن-١٥}}$ > $\frac{ل_{ن}}{ل_{١١}}$

∴ ن - ١٤ > ن - ١٥ ∴ $\frac{ن-١٤}{ن-١٥}$ > ١

∴ (ن - ١٤) (ن - ١٥) > (ن - ١٥)

∴ ن - ١٤ < ١

∴ ن < ١٥

∴ ن ∈ {١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ...}

③ ∵ $ل_{١٢}$ > $ل_{١١}$ ∴ $\frac{ل_{١٢}}{ل_{١١}}$ > ١

∴ $\frac{ن+١٢}{١٢}$ > ١ ∴ ن - ١١ > ١٢

∴ ن > ٢٣ ∴ ن ∈ {٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ...}

④ ∵ $ل_{٨}$ × $ل_{١٠}$ ≤ $ل_{٩}$ × $ل_{٩}$

∴ $\frac{ل_{٨}}{ل_{٩}}$ ≤ $\frac{ل_{٩}}{ل_{١٠}}$

∴ $\frac{ن-٧}{٢}$ ≤ $\frac{٩}{ن+١}$

∴ (ن - ٧) (ن + ١) ≤ ١٨

(لاحظ أن ن - ٥ > ٠ لأن ن ≥ ٨)

∴ ن^{٢} - ٦ ن - ٢٥ ≤ ١٨

∴ ن^{٢} - ٦ ن + ٩ ≤ ٤٩

∴ (ن - ٣)^{٢} ≤ ٤٩ ∴ ن - ٣ ≤ ٧

∴ ن ≤ ١٠ حيث (ن ∈ ص$^{+}$)

∴ ن ∈ {٨ ، ٩ ، ١٠}

٥

① ∵ $ل_{ن-٢}$ = ٧ = $ل_{٧}$ ∴ ن - ٢ = ٧

∴ $\frac{ل_{ن}}{ل_{١}}$ + $\frac{ل_{ن}}{ل_{ن-١}}$ = $\frac{ل_{ن}}{ل_{٢}}$

∴ $\frac{ن(ن-١)}{٢}$ + $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٦}$ = $\frac{ن(ن-١)}{٢}$

∴ $\frac{ن(ن-١)}{٢}$ [١ + $\frac{ن-٢}{٣}$] = $\frac{ن(ن-١)}{٢}$

∴ $\frac{ن+١}{٣}$ = ١ ∴ ن + ١ = ٣

∴ ن = ٢

② ∵ $\frac{ل_{ن}}{ل_{٤}}$ + $\frac{ل_{ن}}{ل_{ن-٤}}$ = $\frac{ل_{ن}}{ل_{٣}}$

∴ $\frac{ن(ن-١)}{٢}$ + $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٢٤}$ = $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٦}$

∴ $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٢٤}$ [١٢ + ن - ٣] = $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٦}$

∴ ن + ٩ = ٤ ∴ ن = -٥ (مرفوض)

③ ∵ $\frac{ل_{ن}}{ل_{٢}}$ = ٢١ ∴ $\frac{ل_{ن}}{ل_{٢}}$ = ٢١

∴ $ل_{ن}$ = ٢١ × $ل_{٢}$ = ٤٢ = ٧ × ٦ = $ل_{٧}$

∴ ن = ٧ ، ∴ $ل_{ن+٧}$ = $ل_{١٤}$ = ٩٩٠

∴ $ل_{ن+٧}$ = ١١ × ١٠ × ٩ = $ل_{١١}$

∴ ن + ٧ = ١١ ∴ ن = ٤

④ ∵ $ل_{ن}$ = ٥ ن

∴ $\frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١}$ = ٥ ن

∴ (ن - ١) (ن - ٢) = ٥ × ٦

∴ ن - ١ = ٦ ∴ ن = ٧

∴ $ل_{ن-١}$ = $ل_{٦}$ = $ل_{٧}$

⑤ ∵ $\frac{ل_{ن}}{ل_{ن-٣}}$ = ٨ = $\frac{ل_{ن}}{ل_{ن-١}}$

∴ $ل_{ن}$ $ل_{ن-١}$ = ٨ $ل_{ن}$ $ل_{ن-٣}$

∴ ن = ٨

⑥ ∵ $ل_{٨+٢}$ = $ل_{١١}$ = ٥٥٤٠

∴ $\frac{ل_{٦}}{ل_{ن-٦}}$ = ٤ = $\frac{ل_{٦}}{ل_{ن-٦}}$

∴ $ل_{ن-٦}$ = ٤ $ل_{ن-٦}$

∴ (ن - ٦) $ل_{ن-٦}$ = ٤ $ل_{ن-٦}$

∴ ن - ٦ = ٤ ∴ ن = ١٠

∴ $ل_{ن+١}$ = $ل_{٤}$ = ٢٤

⑦ ∵ $\frac{ل_{ن}}{ل_{ن-٢}}$ × ٧٢٠ = $\frac{ل_{ن}}{ل_{ن-٤}}$

∴ $ل_{ن}$ = ٧٢٠ = $ل_{٦}$ ∴ ن = ٦

∴ $ل_{٦}$ = ٧٢٠ = $ل_{ن}$ ∴ ن = ٦

∴ $ل_{ن}$ $ل_{ن-٢}$ = $ل_{١٢}$ $ل_{(٦)}$ = $ل_{١٢}$ = ١

⑧ ∵ $\frac{ل_{١٨}}{ل_{١٨-ن} ل_{ن-٢}}$ × ١٥٣

= $\frac{ل_{١٣}}{ل_{١٨-ن} ل_{ن-٥}}$

∴ $\frac{١٨ \times ١٧ \times ١٦ \times ١٥ \times ١٤ \times ١٣}{(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)}$

= $\frac{ل_{١٣}}{ل_{١٨-ن} ل_{ن-٥}}$ × ١٥٣

∴ $\frac{١٨ \times ١٧ \times ١٦ \times ١٥ \times ١٤}{(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)}$

= ١٥٣

∴ $ل_{ن-٢}$ = ٦٧٢٠ = $ل_{٨}$

∴ ن - ٢ = ٨ ∴ ن = ١٠

∴ $ل_{١٠}$ = $ل_{ن-٢}$ = $ل_{٨}$

= $ل_{١٠}$

= ٢٤

⑨ ∵ $\frac{ل_{ن}}{ل_{ن-٣}}$ = ٨ × $\frac{ل_{ن}}{ل_{ن-١}}$

∴ $ل_{ن}$ $ل_{ن-١}$ = ٨ × $ل_{ن}$ $ل_{ن-٣}$

∴ ن = ٨

⑩ ∵ $\frac{ل_{ن}}{ل_{ن-٤}}$ = ٢ + $\frac{ل_{ن}}{ل_{ن-٦}}$

∴ ٢ = $\frac{٥}{ن-٥+١}$ + $\frac{ن-٦+١}{٦}$

∴ ٢ = $\frac{٥}{ن-٤}$ + $\frac{ن-٥}{٦}$

= $\frac{٣٠ + ن^{٢} - ٩ ن + ٢٠}{٢٤ - ٦ ن}$

∴ ١٢ ن - ٤٨ = ن^{٢} - ٩ ن + ٥٠

∴ ن^{٢} - ٢١ ن + ٩٨ = ٠

∴ (ن - ١٤) (ن - ٧) = ٠

∴ ن = ١٤ أ، ن = ٧

⑪ (أ) $\frac{ل_{١٣}}{ل_{ن+١٠} ل_{١٢}}$ = $\frac{ل_{١٣}}{ل_{١٢} ل_{ن-١٠}}$

= $\frac{ن+١}{١٤-ن-١+١}$ = ٢

∴ ٢٨ - ٢ ن = ن + ١

∴ ٣ ن = ٢٧ ∴ ن = ٩

(٢) $\frac{ل_{٧}}{ل_{ن-٢}}$ × $\frac{ل_{٨}}{ل_{٧}}$ = ٢

∴ $\frac{ل_{٨}}{ل_{ن-١٠}}$ = ٢

∴ $\frac{ل_{٧}}{ل_{ن-٢}}$ × $\frac{ل_{٨}}{ل_{ن-١٠}}$

= $\frac{٨ - ن + ١}{ن - ١}$ × $\frac{ن - ١٠}{٨}$

= $\frac{ن - ١٠}{ن - ١}$ = ٢

∴ ن^{٢} - ١٨ ن + ٨٠ = ٢

∴ ن^{٢} - ٢ ن = ن^{٢} - ١٨ ن + ٨٠

∴ ن^{٢} + ١٦ ن - ٨٠ = ٠

∴ (ن - ٤) (ن + ٢٠) = ٠

∴ ن = ٤ أ، ن = -٢٠ (مرفوض)

⑫ ∵ $ل_{ن-٢}$ = $\frac{٢٢٥}{١١}$

∴ $\frac{ل_{٢٨}}{ل_{٢٨-ن} ل_{ن-٢}}$ × $\frac{ل_{٢٨}}{ل_{٤}}$

= $\frac{٢٢٥}{١١}$

∴ $\frac{ل_{٢٨}}{ل_{٢٤} ل_{ن-٢}}$ = $\frac{٢٢٥}{١١}$

∴ $\frac{ل_{ن-٢}}{ل_{٤}}$ = $\frac{٢٢٥}{١١}$ = $\frac{٢٨}{٢٤}$

∴ $\frac{ل_{ن}}{ل_{٢}}$ = $\frac{١١}{٢٤}$

∴ $ل_{٢}$ $ل_{٢٤}$ = ٢٤٠ = $ل_{١٤}$

∴ ٢ ص = ١٤ ∴ ص = ٧

⑬ (م + ٤) (م + ن - ١) (م + ن - ٢)

= ٣٨٠

∴ $ل_{م+ن-٢}$ = ٣٨٠ = $ل_{٢٠}$

∴ م + ن = ٢٠

⑭ هناك عدة حالات :

- س < ٢٩ ومنها فإن س = س + ٢ ص

∴ ص = ٠

- س = ٢٩ ، س + ٢ ص = ٣٠ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$

- س = ٣٠ ، س + ٢ ص = ٢٩ ∴ ص = $-\frac{١}{٢}$

- س = ٣٠ ، س + ٢ ص = ٣٠ ∴ ص = ٠

- س = ٢٩ ، س + ٢ ص = ٢٩ ∴ ص = ٠

٦

① (د) ② (د) ③ (ج) ④ (ب) ⑤ (ب)

⑥ (ج) ⑦ (ج) ⑧ (د) ⑨ (ج) ⑩ (أ)

⑪ (ب) ⑫ (ب) ⑬ (أ) ⑭ (ج) ⑮ (د)

⑯ (ج) ⑰ (أ) ⑱ (ج) ⑲ (د) ⑳ (د)

㉑ (ج) ㉒ (ج) ㉓ (ب) ㉔ (ب) ㉕ (أ)

㉖ (ج) ㉗ (د) ㉘ (ج) ㉙ (ب) ㉚ (أ)

㉛ (د) ㉜ (ج) ㉝ (ج) ㉞ (أ) ㉟ (أ)

㊱ (د) ㊲ (ج) ㊳ (ج) ㊴ (د) ㊵ (أ)

㊶ (أ) ㊷ (ج) ㊸ (د) ㊹ (ج) ㊺ (أ)

㊻ (د) ㊼ (ب) ㊽ (ج) ㊾ (أ)

٧

① ∵ $ن_{ن-٢}$ = ٤٥

∴ $ن_{٩}$ = ٤٥ = $ن_{١٠}$ ∴ ن = ١٠

∴ $ل_{م-٢}$ = ٤

∴ $\frac{م}{٣}$ = ٤ ∴ $\frac{م}{٣}$ = $\frac{م}{م+٣-٢}$

∴ م = ٤ | ٣ ∴ | م | = ٤

∴ م = ٤

∴ $\frac{ن_{م-٢}}{ن_{ن-٢}}$ = $\frac{م-١}{ن-(م-١)+١}$

= $\frac{م-١}{ن-م+٢}$ = $\frac{٤-١}{١٠-٤+٢}$ = $\frac{٣}{٨}$

② ∵ $ن_{ن}$ = ١٢٠ = $ن_{١٠}$

∴ ن = ١٠

∴ $ن_{ص+٢}$ = $ن_{١٠}$ ، ص + ٢ = ن

∴ ص^{٢} + ٢ ص = ٢ ص + ٥

∴ ص^{٢} = ٥ ∴ ص = ± $\sqrt{٥}$ (مرفوض)

أ، ص^{٢} + ٢ ص + ١ = ٥ + ١

∴ ص^{٢} + ٤ ص - ٥ = ٠

∴ (ص + ٥) (ص - ١) = ٠

∴ ص = -٥ (مرفوض) أ، ص = ١

∴ $ن_{ص+٢}$ = $ن_{٣}$ = $ن_{(١)}$ = $ن_{١٠}$ = ن

③ ∵ $ل_{م+٢} = ١٨٢ = ١٤ ل_{٢}$

∴ م + ٢ = ١٤

∴ م = ١٢

، ∵ $ل_{م-١} = ٨٤$

∴ $ل_{ن-١} ٨٤ = ٢ ل_{٤٠٥} = ل_{٩}$

∴ ن − ١ = ٩ ∴ ن = ١٠

∴ م + ١٠ = ١٤ ∴ م = ٤

④ ∵ $أ_{ن} = ٧٢٠ = ٦ أ_{ن}$ ∴ ن = ٦

∴ $\frac{ق_{٧}}{ق_{٥}} = \frac{٧ - ٧ + ١}{٧} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{٨ - ٧}{٧} = \frac{٣}{٥}$ ∴ ٣ س = ٤٠ − ٥ س

∴ ٨ س = ٤٠ ∴ س = ٥

∴ $ق_{٦+١} = ق_{٥-٢} = ق_{٤} = ٣٥$

⑤ ∵ $ل_{٧} ن_{-١} = ٨٤٠ = ٧ ل_{٤}$

∴ ن − ١ = ٤ ∴ ن = ٥

∴ $ل_{ن-٢} = ل_{٤} \times \frac{|ن-٢|}{|ن-٥|} \times \frac{|ن-٧|}{|ن-٢|} = \frac{١}{٤٢}$

$= \frac{|ن-٧|}{|ن-٥| (ن-٦) |ن-٧|} = \frac{١}{٤٢}$

∴ (ن − ٥) (ن − ٦) = ٦ × ٧

∴ ن = ١٢

⑥ ∵ $ل_{ن} = ٥٠٤٠$ ، $ق_{ن} = ٢١٠$

∴ $\frac{ل_{ن}}{ق_{ن}} = \frac{|ن|}{٢١٠} = ٢٤ = \frac{٤}{١}$

∴ ن = ٤

∴ $ل_{٤} = ٥٠٤٠ = ١٠ ل_{٤}$

∴ ن = ١٠

∴ $ق_{ن+١} = ق_{١٠+١} = ق_{٢١}$ (٤)

$= ق_{٨} = ١٦٥$

⑦ ∵ $\frac{ق_{ن}}{ق_{٥}} = \frac{٦}{٥}$ ∴ $\frac{ق_{ن-١+١}}{ق_{ن}} = \frac{٦}{٥}$

∴ $\frac{ق_{ن-١}}{ق_{ن}} = \frac{٥}{٦}$

∴ ٦ ق$_{ن-١}$ = ٥ ق$_{ن}$ + ٥

∴ ١١ ق$_{ن}$ − ٥ ق$_{ن}$ = ٥ (١)

، ∵ ق$_{ن}$ = ق$_{ن-١+١}$

∴ ٢ ق$_{ن}$ + ١ = ق$_{ن}$ (٢)

بحل (١) ، (٢) : ∴ ق$_{ن}$ = ٢١ ، ن = ١٠

⑧ ∵ $\frac{ق_{١٠}}{ق_{٢}} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{ق_{ن-(ن+١)+١}}{ن+١} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{ق_{ن-١}}{ن+١} = \frac{٣}{٢}$

∴ ٢ ق$_{ن-١}$ − ٢ ن = ٣ ن + ٣

∴ ٢ ق$_{ن-١}$ − ٥ ن = ٣ (١)

، ∵ $ق_{ن-١} = ق_{ن-١-١+١}$

∴ $\frac{ق_{ن-١}}{ن-١} = ٤$ ∴ $\frac{ق_{ن-(ن-١)+١}}{ن-١} = ٤$

∴ $\frac{ق_{ن-ن+٢}}{ن-١} = ٤$

∴ ق$_{ن-ن+٢}$ − ٤ ن + ٤ = ٤ ن − ٤

∴ ق$_{ن-٥}$ ن = −٦ (٢)

بحل (١) ، (٢) : ∴ ق$_{ن}$ = ٩ ، ن = ٣

⑨ ∵ $ق_{ن} = ق_{ن-١}$

∴ ن + ن − ١ = ق$_{ن}$ ∴ ق$_{ن}$ = ٢ ن − ١

، ∵ $ق_{ن+١} = \frac{٤٠}{|ن} \times ل_{ن-٢}$

∴ $ق_{٢ن} = \frac{٤٠}{|٢ن} \times ٢ ل_{ن-١} ل_{ن-٢}$

∴ $\frac{|٢ن}{|ن|ن} = \frac{٤٠}{|ن} \times \frac{|٢ن-١}{|ن+١}$

∴ $\frac{(٢ن) |٢ن-١}{|ن \times (ن+١) |ن} = \frac{٤٠ |٢ن-١}{|ن|ن}$

∴ ٢ ن = $\frac{٤٠}{ن+١}$ ∴ (٢ ن) (ن + ١) = ٤٠

∴ ٢ ن^{٢} + ٢ ن − ٤٠ = ٠

∴ ن^{٢} + ن − ٢٠ = ٠

∴ (ن + ٥) (ن − ٤) = ٠

∴ ن = −٥ (مرفوض) أو ن = ٤ ومنها ق$_{ن}$ = ٧

⑩ ∵ $ق_{٣ن} = ق_{ن+١٥}$

∴ ٣ ن = ن + ١٥ ∴ ٢ ن = ١٥

∴ ن = $\frac{١٥}{٢}$ (مرفوض) أو ن = ٣

∴ ٤ ن = ١٢ ∴ ن = ٣

∴ $\frac{ل_{ن}}{ل_{ن-٢}} = \frac{٢٠٥}{٤٠}$

∴ $\frac{|ن+٢}{|٨|ن-٦} \times \frac{|ن-٦}{|ن-٢} = \frac{٢}{٤٠}$

∴ $\frac{|ن+٢}{|٨|ن-٢} = \frac{٢}{٤٠}$

∴ $ل_{٢٠٥} = \frac{٢}{٤٠} \times ٨ = ٣٠٢٤ = ل_{٤}$

∴ ن + ٢ = ٩ ∴ ن = ٧

∴ $ق_{ن+١} : ق_{ن} = ق_{٤} : ق_{٣}$

$= \frac{٧ - ٤ + ١}{٤} = ١$

⑪ ∵ $ل_{٦} ر = ٤ \times ل_{ر-١}$

∴ $\frac{ل_{٦}}{ل_{٦-ر}} = ٤ \times \frac{|٦}{|٦-ر}$

∴ (٧ − ر) |٦ − ر| = ٤ |٦ − ر|

∴ ٧ − ر = ٤ ∴ ر = ٣

∴ |ن − ٣| = ٦ = |٣| ∴ ن − ٣ = ٣

∴ ن = ٦

⑫ ∵ $\frac{ل_{٢٠٥} ر}{ل_{٢٠٥} ر} = ٢$ ∴ |ر = ٢ = |٢

∴ ر = ٢

∴ $\frac{ق_{ن}}{ق_{٢}} = \frac{٥}{٢}$ ∴ $\frac{ن-٢+١}{٢} = \frac{٥}{٢}$

∴ ن − ٢ = ٥ ∴ ن = ٧

∴ $ق_{١٠} = ق_{٧+٣} = ق_{٧} + ٣ د$

$= ٢٠٥ + ٣ \times ٤٠٠ = ١٢٠٥$

⑬ ∵ $|أ_{ن-٣} = ١٢٠ = |٥$

∴ ن − ٣ = ٥ ∴ ن = ٨

∴ ٤ × $ق_{١٠} ر = ٩ \times ق_{٨} ر$

∴ ٤ × $\frac{|٩}{|٨-ر|ر+١} = ٩ \times \frac{|٨}{|٨-ر|ر}$

∴ ٤ × $\frac{|٨}{|٨-ر|ر(ر+١)} = ٩ \times \frac{|٨}{|٨-ر|ر}$

∴ ٤ = ر + ١ ∴ ر = ٣

∴ $ل_{ر} = ق_{ر}$ ، $ق_{ر} = ق_{٨} = ق_{٣+٣} = ٦$

⑭ ∵ $\frac{|ن+٢}{|ن} + ٣ ن = ٧٤$

∴ $\frac{(ن+٢)(ن+١)|ن}{|ن} + ٣ ن = ٧٤$

∴ (ن + ٢) (ن + ١) + ٣ ن = ٧٤

∴ ن^{٢} + ٣ ن + ٢ + ٣ ن = ٧٤

∴ ن^{٢} + ٦ ن − ٧٢ = ٠

∴ (ن + ١٢) (ن − ٦) = ٠

∴ ن = −١٢ (مرفوض) أو ن = ٦

∴ $|ر = ٦ = |٣$ ∴ ر = ٣

∴ $ق_{ر} = ق_{٦} = ٢٠$

⑮ ∵ $\frac{ق_{ن}}{ق_{٧}} = \frac{٥}{٧}$ ∴ $\frac{ن-ر+١}{ن} = \frac{٥}{٧}$

∴ ٧ ق$_{ن-١}$ − ٧ ن + ٧ = ٥ ن

∴ ٧ ق$_{ن-١}$ − ١٢ ن = −٧ (١)

، ∵ $ل_{ن-١} = ٥$

∴ $\frac{|ن}{|ن-ر|ر} \times \frac{|ن-ر+١}{|ن} = ٥$

∴ $\frac{(ن-ر+١)|ن-ر}{|ن-ر} = ٥$

∴ ن − ر + ١ = ٥ ∴ ن − ر = ٤ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ ن = ١٢ ، ر = ٨

⑯ ∵ $\frac{ل_{ن+١}}{ل_{ن}} = ٧$

∴ $\frac{|ن+١}{|ن-ر|ن} \times ل_{ن-ر} = ٧$

∴ $\frac{(ن+١)|ن}{|ن} = ٧$

∴ ن + ١ = ٧ ∴ ن = ٦

∴ $\frac{ق_{٦}}{ق_{٤}} = \frac{٣}{٤}$ ∴ $\frac{٦ - ر + ١}{ر} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{٧ - ر}{ر} = \frac{٣}{٤}$ ∴ ٢٨ − ٤ ر = ٣ ر

∴ ٢٨ = ٧ ر ∴ ر = ٤

∴ $|ن-ر-٢ = |٦-٤-٢ = |٠ = ١$

⑰ ∵ $\frac{ق_{١٣}}{ق_{١٠}} = \frac{٥}{٩}$

∴ $\frac{ق_{١٣}}{ق_{ر}} = \frac{٥}{٩}$

∴ $\frac{١٣ - (ر+١)+١}{ر+١} = \frac{٥}{٩}$

∴ $\frac{١٣ - ر}{ر+١} = \frac{٥}{٩}$

∴ ٥ ر + ٥ = ١١٧ − ٩ ر

∴ ١٤ ر = ١١٢ ∴ ر = ٨

∴ $ق_{٦} + ق_{٧} = ٣٤٣٢$

∴ $ق_{ن+١} = ٣٤٣٢ = ١٤ ق_{٧}$

∴ ن + ١ = ١٤ ∴ ن = ١٣

⑱ ∵ $\frac{ل_{ن+١٠}}{ل_{ن+١٠}} = |ر + ١ = ٧٢٠ = |٦$

∴ ن + ١ = ٦ ∴ ن = ٥

∴ $ق_{٥} + ق_{ن+١} = ق_{٥+ن+١} = ق_{٥٦} = ق_{٨}$

∴ ن + ١ = ٨ ∴ ن = ٧

⑲ ∵ $\frac{ص_{ن+١٠}}{ص_{ن}} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{ص_{ن+١}}{ص_{ن}} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{ص_{ن+١}}{ص_{ن}} = \frac{١}{٢}$

∴ ٢ س − ٢ ص = ص + ١

∴ ٢ س − ٣ ص = ١ (١)

، ∵ $ص_{ن} = ص_{ن-١}$

∴ ص + ص − ١ = ص

∴ ٢ ص − ص = ١ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ س = ٥ ، ص = ٣

⑳ ∵ س$_{٠}$ ص$_{١}$ = ٣٦٠ = ٦ ل$_{٤}$

∴ س + ص = ٦ (١)

∴ $\frac{٢ س + ص}{٧} = ٥٠٤٠$

∴ ٢ س + ص = ٧ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ س = ١ ، ص = ٥

∴ ص$_{٢}$ س = ص$_{٢}$ = ١٠

٨

① ∵ $\frac{ق_{ن+٢٠}}{ق_{ن+١٠}} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{ق_{ن-(ن+٢)+١}}{ن+٢} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{ق_{ن-ن-١}}{ن+٢} = \frac{٣}{٢}$

∴ ٢ ق$_{ن-٢}$ − ٢ ن = ٣ ن + ٦

∴ ٢ ق$_{ن-٥}$ − ٥ ن = ٨ (١)

، ∵ $\frac{ق_{ن+١٠}}{ق_{ن}} = \frac{٢}{١}$

∴ $\frac{ق_{ن-(ن+١)+١}}{ن+١} = \frac{٢}{١}$ ∴ $\frac{ق_{ن-ن}}{ن+١} = \frac{ق_{ن-٢}}{ن+١}$

∴ ق$_{ن-٢}$ = ٢ ن + ٢

∴ ق$_{ن-٣}$ = ٢ ن (٢)

② ∵ ٢ |س| = |س + ٢|

∴ ٣ |س| = (س + ٢) |س + ١|

∴ (س + ٢) (س + ١) = ٦ × ٥

∴ س + ٢ = ٩ ∴ س = ٤

③ ∵ ل$_{ن}$ = س × ٢^{ن} ل$_{ن-١}$ = ٠

∴ ٢ ل$_{س}$ = س ل$_{س-١}$

∴ $\frac{ل_{س}}{ل_{س-١}}$ = س × $\frac{٢}{٨-س}$

∴ ٨ − س = س (٧ − س)

∴ (٨ − س) (٧ − س) = س (٧ − س)

∴ ٨ − س = س ∴ ٢ س = ٨

∴ س = ٤

④ ∵ ٣٠ × س$^{٢-س}$ ل$_{٢}$ = س$^{٥-س}$ ل$_{٥}$

∴ ٣٠ $\frac{س^{س+٣}}{س^{س}}$ = $\frac{|س+٥|}{|س|}$

∴ ٣٠ |س + ٣| = (س + ٥) (س + ٤) |س + ٢|

∴ (س + ٥) (س + ٤) = ٦ × ٥

∴ س + ٥ = ٦ ∴ س = ١

⑤ ∵ |س + ٢| = ١٨٢ × $\frac{|س|}{|س-١١|}$ × |س − ١١|

∴ (س + ٢) (س + ١) |س| = ١٨٢ |س|

∴ (س + ٢) (س + ١) = ١٤ × ١٣

∴ س + ١ = ١٣ ∴ س = ١٢

⑥ ∵ (ن$_{٣}$ + ن$_{٤}$) + (ن$_{٣}$ + ن$_{٥}$) + (ن$_{٤}$ + ن$_{٥}$) = ١٢٠

∴ ٢ ن$_{٣}$ + ٢ ن$_{٤}$ + ٢ ن$_{٥}$ = ١٢٠

∴ ن$_{٣}$ + ن$_{٤}$ + ن$_{٥}$ = ٦٠

∴ ن$_{٣}$ = ١٢٠ − ٦٠

= ٦٠

⑦ ∵ ٢ ن$_{٣}$ + ٢٢ ن$_{٤}$ = ١١ ن$_{٣}$

∴ $\frac{٢ن_{٣}}{ن_{٣}}$ + $\frac{٢٢ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = ١١

∴ ٢ + ٢٢ $\frac{ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = ١١

∴ ٢٢ $\frac{ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = ٩ ∴ $\frac{ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = $\frac{٩}{٢٢}$

∴ $\frac{ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = $\frac{ن_{٥}}{ن_{٤}}$ = $\frac{٩}{٢٢}$

∴ ن$_{٥}$ = $\frac{٨١}{٤٨٤}$ ن$_{٣}$

∴ ن$_{٥}$ = $\frac{٨١}{٤٨٤}$ × ٢٥٦ = ٤٨

⑧ ∵ $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١ \times ٢ \times ٣}$ − $\frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢}$ = ١١

∴ $\frac{ن(ن-١)(ن-٢) - ٣ن(ن-١)}{٦}$ = ١١

∴ $\frac{(ن-١)(ن-٤)(ن+١)}{٦}$ = ١١

∴ $\frac{(ن-١)(ن-٤)(ن+١)}{٦}$ = $\frac{٦٦}{٦}$

∴ (ن − ١) (ن − ٤) (ن + ١) = ٦٦

∴ ن^{٣} − ٤ن^{٢} + ن − ٤ = ٦٦

∴ ن^{٣} − ٤ن^{٢} + ن − ٧٠ = ٠

∴ (ن − ١٠) (ن^{٢} + ٦ن + ٧) = ٠

∴ ن = ١٠ أ، ن = −٣ ± $\sqrt{٢}$ ل

⑨ ∵ $\frac{ن!}{٤!(ن-٤)!}$ = ٢٨٠

∴ $\frac{ن!}{٤!(ن-٤)!}$ = ٥ ن$_{٥}$ = ٢٨٠

∴ ن$_{٥}$ = ٥٦ = ن^{٣} ∴ ن = ٨

⑩ ∵ $\frac{ن+١}{ن-٩}$ − $\frac{ن}{ن-٩}$ = $\frac{ن+١}{ن}$ = $\frac{(ن+١)!}{ن!}$

∴ ن + ١ = ١١ ∴ ن = ١٠

⑪ ∵ $\frac{ن-٤}{٢}$ = $\frac{ن+٢}{٢}$

∴ ن − ٤ = ن + ٢ ∴ ٠ = ٦

∴ أصغر قيمة لـ ص = ٢ ل$_{٣}$ = ٢

∴ أقل قيمة للمقدار |س + ص| = |٦ + ٢| = ٤٠٣٢٠

أما أقل قيمة للمقدار |س − ص| تتحقق عندما تكون

س = ٢ ل$_{٣}$ = ٦ ، ص = ٣ ل$_{٣}$ = ٦

∴ أقل قيمة للمقدار |س − ص| = |٦ − ٦| = |٠| = ١

١١

① $\frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$ = $\frac{ن}{ر}$ × $\frac{(ن-ر+١)!}{(ن-ر)!(ر-١)!}$

= $\frac{ن}{ر}$ × $\frac{(ن-١)!}{(ر-١)!(ن-ر)!}$ = $\frac{ن}{ر}$ $\frac{ن-١}{ر-١}$

(١) ∵ $\frac{ن^{٢٥}}{ن^{٢٤}}$ + $\frac{ن^{٢٤}}{ن^{٢٣}}$

= $\frac{ن^{٢٥}}{ن^{٢٤}}$ + ١ + $\frac{ن^{٢٣}}{ن^{٢٢}}$ = $\frac{٢٥}{٢٤}$ + ١ + $\frac{٢٣}{٢٢}$ = $\frac{٥٨}{٩}$

(٢) ∵ $\frac{ن^{٢٠٠}}{ن^{١٠٠}}$ = ٩ ن^{١٠٠} ∴ $\frac{ن^{١٠٠}}{ن^{٩٩}}$ = ٩ ن^{٩٩}

∴ $\frac{ن+٢}{ن+١}$ = ٩ ∴ ن + ٢ = ٩ ن + ٩

∴ ن − ٩ ن = ٧ (١)

∴ ٩ ن^{١٠٠} = ٩٠ ن^{٩٩}

∴ $\frac{ن^{١٠٠}}{ن^{٩٩}}$ = $\frac{ن+١}{ن}$ = $\frac{٩٠}{٩}$ = ١٠

∴ ن + ١ = ١٠ ن

∴ ن − ١٠ ن = −١ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ ن = ٧٩ ، ن = ٨

∴ ٤٢ (ن − ٢١) = ٣ ن^{٢} − ٢٢ ن + ٤٦٨

∴ ٣ ن^{٢} − ٧٥ ن + ٤٦٨ = ٠ (وبالقسمة على ٣)

∴ ن^{٢} − ٢٥ ن + ١٥٦ = ٠

∴ (ن − ١٢) (ن − ١٣) = ٠

∴ ن = ١٢ أ، ن = ١٣

③ ∵ ٢ $\frac{١٤}{ن-١}$ ن$_{ر-١}$ ، ٣ $\frac{١٤}{ن-ر}$ ن$_{ر}$

، ٦ $\frac{١٤}{ن-ر+١}$ ن$_{ر-١}$ متتابعة هندسية

∴ $\frac{٢\frac{١٤}{ن-ر+١}}{٣\frac{١٤}{ن-ر}}$ = $\frac{٦\frac{١٤}{ن-ر+١}}{٢\frac{١٤}{ن-ر}}$

∴ $\frac{٢}{٣}$ $\left(\frac{١٤-ر+١}{ن-ر+١}\right)$ = $\frac{١}{٢}$ $\left(\frac{١٤-ر}{ن-ر}\right)$

∴ $\frac{٢}{٣}$ $\left(\frac{١٥-ر}{ن-ر+١}\right)$ = $\frac{١}{٢}$ $\left(\frac{١٤-ر}{ن-ر}\right)$

∴ $\frac{٢٨-٢ر}{٣ن-٣ر}$ = $\frac{١٥-ر}{٢ن-٢ر}$

∴ ٥٦ − ٤ ر = ٣ ر^{٢} − ٤٢ ر + ٤٥

∴ ر^{٢} − ١٤ ر + ٤٥ = ٠

∴ (ر − ٩) (ر − ٥) = ٠

∴ ر = ٩ أ، ر = ٥

④ ∵ ل$_{٣٠٠}$ = ٩٩٠ = ١١ ل$_{٣}$

∴ ن + م = ١١ (١)

، ٢ن − ٣م = ل$_{٣}$ = ٧٢ ∴ ٢ن − م = ٩ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ ن = ٥ ، م = ٦

∴ $\frac{ن}{م}$ = $\frac{٥}{٦}$ = ١ ، ل$_{١}$ = ل$_{٥}$ = ٥

، $\frac{ن}{٢٢}$ ل$_{٣٠٠}$ = $\frac{٥}{٢٢}$ × ل$_{١١}$ = ٢٥

∴ $\frac{٢٥}{٥}$ = $\frac{٥}{١}$

∴ |م − ن| ، ل$_{١}$ ، $\frac{ن}{٢٢}$ ل$_{٣٠٠}$ فى تتابع هندسى

⑤ ∵ ل$_{٣ن}$ = س

∴ أصغر قيمة لـ س = ل$_{٣}$ = ٦

② ∵ ٢ |س| = |س + ٢|

∴ ٣ |س| = (س + ٢) |س + ١|

∴ (س + ٢) (س + ١) = ٦ × ٥

∴ س + ٢ = ٩ ∴ س = ٤

③ ∵ ل$_{س}$ = س × ٢^{س} ل$_{س-١}$ = ٠

∴ ٢ ل$_{س}$ = س ل$_{س-١}$

∴ $\frac{ل_{س}}{ل_{س-١}}$ = س × $\frac{٢}{٨-س}$

∴ ٨ − س = س (٧ − س)

∴ (٨ − س) (٧ − س) = س (٧ − س)

∴ ٨ − س = س ∴ ٢ س = ٨

∴ س = ٤

④ ∵ ٣٠ × س$^{٢-س}$ ل$_{٢}$ = س$^{٥-س}$ ل$_{٥}$

∴ ٣٠ $\frac{س^{س+٣}}{س^{س}}$ = $\frac{|س+٥|}{|س|}$

∴ ٣٠ |س + ٣| = (س + ٥) (س + ٤) |س + ٢|

∴ (س + ٥) (س + ٤) = ٦ × ٥

∴ س + ٥ = ٦ ∴ س = ١

⑤ ∵ |س + ٢| = ١٨٢ × $\frac{|س|}{|س-١١|}$ × |س − ١١|

∴ (س + ٢) (س + ١) |س| = ١٨٢ |س|

∴ (س + ٢) (س + ١) = ١٤ × ١٣

∴ س + ١ = ١٣ ∴ س = ١٢

⑥ ∵ (ن$_{٣}$ + ن$_{٤}$) + (ن$_{٣}$ + ن$_{٥}$) + (ن$_{٤}$ + ن$_{٥}$) = ١٢٠

∴ ٢ ن$_{٣}$ + ٢ ن$_{٤}$ + ٢ ن$_{٥}$ = ١٢٠

∴ ن$_{٣}$ + ن$_{٤}$ + ن$_{٥}$ = ٦٠

∴ ن$_{٣}$ = ١٢٠ − ٦٠

= ٦٠

⑦ ∵ ٢ ن$_{٣}$ + ٢٢ ن$_{٤}$ = ١١ ن$_{٣}$

∴ $\frac{٢ن_{٣}}{ن_{٣}}$ + $\frac{٢٢ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = ١١

∴ ٢ + ٢٢ $\frac{ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = ١١

∴ ٢٢ $\frac{ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = ٩ ∴ $\frac{ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = $\frac{٩}{٢٢}$

∴ $\frac{ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = $\frac{ن_{٥}}{ن_{٤}}$ = $\frac{٩}{٢٢}$

∴ ن$_{٥}$ = $\frac{٨١}{٤٨٤}$ ن$_{٣}$

∴ ن$_{٥}$ = $\frac{٨١}{٤٨٤}$ × ٢٥٦ = ٤٨

⑧ ∵ $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١ \times ٢ \times ٣}$ − $\frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢}$ = ١١

∴ $\frac{ن(ن-١)(ن-٢) - ٣ن(ن-١)}{٦}$ = ١١

∴ $\frac{(ن-١)(ن-٤)(ن+١)}{٦}$ = ١١

∴ $\frac{(ن-١)(ن-٤)(ن+١)}{٦}$ = $\frac{٦٦}{٦}$

∴ (ن − ١) (ن − ٤) (ن + ١) = ٦٦

∴ ن^{٣} − ٤ن^{٢} + ن − ٤ = ٦٦

∴ ن^{٣} − ٤ن^{٢} + ن − ٧٠ = ٠

∴ (ن − ١٠) (ن^{٢} + ٦ن + ٧) = ٠

∴ ن = ١٠ أ، ن = −٣ ± $\sqrt{٢}$ ل

⑨ ∵ $\frac{ن!}{٤!(ن-٤)!}$ = ٢٨٠

∴ $\frac{ن!}{٤!(ن-٤)!}$ = ٥ ن$_{٥}$ = ٢٨٠

∴ ن$_{٥}$ = ٥٦ = ن^{٣} ∴ ن = ٨

⑩ ∵ $\frac{ن+١}{ن-٩}$ − $\frac{ن}{ن-٩}$ = $\frac{ن+١}{ن}$ = $\frac{(ن+١)!}{ن!}$

∴ ن + ١ = ١١ ∴ ن = ١٠

⑪ ∵ $\frac{ن-٤}{٢}$ = $\frac{ن+٢}{٢}$

∴ ن − ٤ = ن + ٢ ∴ ٠ = ٦

∴ أصغر قيمة لـ ص = ٢ ل$_{٣}$ = ٢

∴ أقل قيمة للمقدار |س + ص| = |٦ + ٢| = ٤٠٣٢٠

أما أقل قيمة للمقدار |س − ص| تتحقق عندما تكون

س = ٢ ل$_{٣}$ = ٦ ، ص = ٣ ل$_{٣}$ = ٦

∴ أقل قيمة للمقدار |س − ص| = |٦ − ٦| = |٠| = ١

١٢

⑫ ∵ ٢ $\frac{ن!}{(ن+٢)!}$ = $\frac{(ن+١)!}{(ن+٢)!}$ = $\frac{(ن+١)!}{ن!}$

∴ $\frac{٢ن!}{ن!}$ = $\frac{(ن+٢)(ن+١)!}{ن!}$ = $\frac{ن+٢}{٢}$

∴ ل$_{ن}$ = ل$_{٢ن+٢}$

∴ ٢ ن = ن + ٢ ∴ ن = ٢ ، أ = صفر

⑬ ∵ $\frac{١}{ن!}$ + $\frac{١}{(ن+١)!}$ = $\frac{٩}{(ن+٢)!}$

(بالضرب × (ن + ٢)!)

∴ $\frac{ن+٢}{ن!}$ + $\frac{ن+٢}{(ن+١)!}$ = ٩

∴ $\frac{(ن+٢)(ن+١)!}{ن!}$ + $\frac{(ن+٢)!}{(ن+١)!}$ = ٩

∴ ن^{٢} + ٣ ن + ٢ + ن + ٢ = ٩

∴ ن^{٢} + ٤ ن − ٥ = ٠

∴ (ن + ٥) (ن − ١) = ٠

∴ ن = −٥ (مرفوض) أ، ن = ١

⑭ ∵ $\frac{ن+١}{(ن+٢)!}$ + $\frac{ن}{(ن+١)!}$ = $\frac{١٣}{٤٢}$

∴ $\frac{١}{(ن+٢)!}$ + $\frac{ن}{(ن+١)!}$ = $\frac{١٣}{٤٢}$

∴ $\frac{(ن+١)+(ن+٢)}{(ن+٢)(ن+١)!}$ = $\frac{١٣}{٤٢}$

∴ $\frac{ن^{٢}+٣ن+٢}{ن^{٢}+٣ن+٢}$ = $\frac{١٣}{٤٢}$

∴ ٤٢ (ن^{٢} + ٣ ن + ٢) = ١٣ (ن^{٢} + ٣ ن + ٢)

∴ ٨٤ ن + ١٢٦ = ١٣ ن^{٢} + ٣٩ ن + ٢٦

∴ ١٣ ن^{٢} − ٤٥ ن − ١٠٠ = ٠

∴ (ن − ٥) (١٣ ن + ٢٠) = ٠

∴ ن = ٥ أ، ن = $\frac{-٢٠}{١٣}$ (مرفوض)

⑮ ∵ $\frac{ن+٢}{ن-٤}$ = $\frac{٢ن+٣}{٢ن-٤}$

∴ $\frac{ن+٢}{ن}$ = $\frac{٢ن+٣}{٢ن-٤}$

∴ ل$_{ن+٢}$ = ل$_{٢ن-٢}$

∴ ن + ٢ = ٢ ن − ٣

∴ ن = ٥

⑯ ∵ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٣)!}$ = ٧٢ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٣)!}$

بضرب الطرفين × (٣ ن − ٦)

∴ ٢ ن $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٣)!}$ × ٣ (ن − ٢)

= ٧٢ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٣)!}$ × (٣ ن − ٦)

∴ ٣ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$ = ٧٢ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$

∴ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$ = ٢٤ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$

∴ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$ = ٤ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$

∴ $\frac{٢ن!}{٤}$ = $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$

∴ ٢$^{ن-١}$ ل$_{٢ن-٤}$ = ٢$^{٢ن-٦}$ ل$_{٢ن-٤}$

∴ ٢ ن = ٣ ن − ٦ ∴ ن = ٦

١٠

① العامل الأوسط = (ن − ٣) = ٩

∴ ن = ١٢ ∴ س^{٢} − ١٢ = ٤

∴ س^{٢} = ١٦

∴ س = ٤ (ويرفض الحل السالب)

∴ |س| = |٤| = ٢٤

② ∵ ٤ ن$_{٥}$ ، ٣ ن$_{٦}$ ، ٣ ن$_{٧}$ متتابعة حسابية

∴ ٦ ن$_{٦}$ = ٤ ن$_{٥}$ + ٣ ن$_{٧}$

∴ ٦ $\frac{ن_{٦}}{ن_{٥}}$ = ٤ + ٣ $\frac{ن_{٧}}{ن_{٥}}$

∴ ٦ = ٤ $\left(\frac{٦}{ن-٦+١}\right)$ + ٣ $\left(\frac{ن-٧+١}{٧}\right)$

∴ ٦ = $\frac{٢٤}{ن-٥}$ + $\frac{٣ن-١٨}{٧}$

∴ ٦ = $\frac{٢٤ \times ٧ + (٣ن-١٨)(ن-٥)}{٧(ن-٥)}$

∴ ٤٢ (ن − ٥) = ٣ن^{٢} − ٣٣ ن + ٩٠

∴ ٣ن^{٢} − ٧٥ ن + ٢٤٠ = ٠ (وبالقسمة على ٣)

∴ ن^{٢} − ٢٥ ن + ٨٠ = ٠

∴ (ن − ٨) (ن − ١٠) = ٠

∴ ن = ٨ أ، ن = ١٠

③ ∵ ٢ $\frac{١٤}{ن-ر}$ ن$_{ر-١}$ ، ٣ $\frac{١٤}{ن-ر}$ ن$_{ر}$

، ٦ $\frac{١٤}{ن-ر+١}$ ن$_{ر-١}$ متتابعة هندسية

∴ $\frac{٢\frac{١٤}{ن-ر+١}}{٣\frac{١٤}{ن-ر}}$ = $\frac{٦\frac{١٤}{ن-ر+١}}{٢\frac{١٤}{ن-ر}}$

∴ $\frac{٢}{٣}$ $\left(\frac{١٤-ر+١}{ن-ر+١}\right)$ = $\frac{١}{٢}$ $\left(\frac{١٤-ر}{ن-ر}\right)$

∴ $\frac{٢}{٣}$ $\left(\frac{١٥-ر}{ن-ر+١}\right)$ = $\frac{١}{٢}$ $\left(\frac{١٤-ر}{ن-ر}\right)$

∴ $\frac{٢٨-٢ر}{٣ن-٣ر}$ = $\frac{١٥-ر}{٢ن-٢ر}$

∴ ٥٦ − ٤ ر = ٣ ر^{٢} − ٤٢ ر + ٤٥

∴ ر^{٢} − ١٤ ر + ٤٥ = ٠

∴ (ر − ٩) (ر − ٥) = ٠

∴ ر = ٩ أ، ر = ٥

④ ∵ ل$_{٣٠٠}$ = ٩٩٠ = ١١ ل$_{٣}$

∴ ن + م = ١١ (١)

، ٢ن − ٣م = ل$_{٣}$ = ٧٢ ∴ ٢ن − م = ٩ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ ن = ٥ ، م = ٦

∴ $\frac{ن}{م}$ = $\frac{٥}{٦}$ = ١ ، ل$_{١}$ = ل$_{٥}$ = ٥

، $\frac{ن}{٢٢}$ ل$_{٣٠٠}$ = $\frac{٥}{٢٢}$ × ل$_{١١}$ = ٢٥

∴ $\frac{٢٥}{٥}$ = $\frac{٥}{١}$

∴ |م − ن| ، ل$_{١}$ ، $\frac{ن}{٢٢}$ ل$_{٣٠٠}$ فى تتابع هندسى

⑤ ∵ ل$_{٣ن}$ = س

∴ أصغر قيمة لـ س = ل$_{٣}$ = ٦

⑥ $\left(ن_{٣}+ن_{٤}+ن_{٥}\right)+\left(ن_{٣}+ن_{٤}+ن_{٥}\right)$

= ٢ ن$_{٣}$ + ٢ ن$_{٤}$ + ٢ ن$_{٥}$ = ١٢٠

∴ ن$_{٣}$ + ن$_{٤}$ + ن$_{٥}$ = ٦٠

∴ ن$_{٣}$ = ١٢٠ − ٦٠

= ٦٠

⑦ ∵ ٢ ن$_{٣}$ + ٢٢ ن$_{٤}$ = ١١ ن$_{٣}$

∴ $\frac{٢ن_{٣}}{ن_{٣}}$ + $\frac{٢٢ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = ١١

∴ ٢ + ٢٢ $\frac{ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = ١١

∴ ٢٢ $\frac{ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = ٩ ∴ $\frac{ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = $\frac{٩}{٢٢}$

∴ $\frac{ن_{٤}}{ن_{٣}}$ = $\frac{ن_{٥}}{ن_{٤}}$ = $\frac{٩}{٢٢}$

∴ ن$_{٥}$ = $\frac{٨١}{٤٨٤}$ ن$_{٣}$

∴ ن$_{٥}$ = $\frac{٨١}{٤٨٤}$ × ٢٥٦ = ٤٨

⑧ ∵ $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١ \times ٢ \times ٣}$ − $\frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢}$ = ١١

∴ $\frac{ن(ن-١)(ن-٢) - ٣ن(ن-١)}{٦}$ = ١١

∴ $\frac{(ن-١)(ن-٤)(ن+١)}{٦}$ = ١١

∴ $\frac{(ن-١)(ن-٤)(ن+١)}{٦}$ = $\frac{٦٦}{٦}$

∴ (ن − ١) (ن − ٤) (ن + ١) = ٦٦

∴ ن^{٣} − ٤ن^{٢} + ن − ٤ = ٦٦

∴ ن^{٣} − ٤ن^{٢} + ن − ٧٠ = ٠

∴ (ن − ١٠) (ن^{٢} + ٦ن + ٧) = ٠

∴ ن = ١٠ أ، ن = −٣ ± $\sqrt{٢}$ ل

⑨ ∵ $\frac{ن!}{٤!(ن-٤)!}$ = ٢٨٠

∴ $\frac{ن!}{٤!(ن-٤)!}$ = ٥ ن$_{٥}$ = ٢٨٠

∴ ن$_{٥}$ = ٥٦ = ن^{٣} ∴ ن = ٨

⑩ ∵ $\frac{ن+١}{ن-٩}$ − $\frac{ن}{ن-٩}$ = $\frac{ن+١}{ن}$ = $\frac{(ن+١)!}{ن!}$

∴ ن + ١ = ١١ ∴ ن = ١٠

⑪ ∵ $\frac{ن-٤}{٢}$ = $\frac{ن+٢}{٢}$

∴ ن − ٤ = ن + ٢ ∴ ٠ = ٦

∴ أصغر قيمة لـ ص = ٢ ل$_{٣}$ = ٢

∴ أقل قيمة للمقدار |س + ص| = |٦ + ٢| = ٤٠٣٢٠

أما أقل قيمة للمقدار |س − ص| تتحقق عندما تكون

س = ٢ ل$_{٣}$ = ٦ ، ص = ٣ ل$_{٣}$ = ٦

∴ أقل قيمة للمقدار |س − ص| = |٦ − ٦| = |٠| = ١

١١

① $\frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$ = $\frac{ن}{ر}$ × $\frac{(ن-ر+١)!}{(ن-ر)!(ر-١)!}$

= $\frac{ن}{ر}$ × $\frac{(ن-١)!}{(ر-١)!(ن-ر)!}$ = $\frac{ن}{ر}$ $\frac{ن-١}{ر-١}$

(١) ∵ $\frac{ن^{٢٥}}{ن^{٢٤}}$ + $\frac{ن^{٢٤}}{ن^{٢٣}}$

= $\frac{ن^{٢٥}}{ن^{٢٤}}$ + ١ + $\frac{ن^{٢٣}}{ن^{٢٢}}$ = $\frac{٢٥}{٢٤}$ + ١ + $\frac{٢٣}{٢٢}$ = $\frac{٥٨}{٩}$

(٢) ∵ $\frac{ن^{٢٠٠}}{ن^{١٠٠}}$ = ٩ ن^{١٠٠} ∴ $\frac{ن^{١٠٠}}{ن^{٩٩}}$ = ٩ ن^{٩٩}

∴ $\frac{ن+٢}{ن+١}$ = ٩ ∴ ن + ٢ = ٩ ن + ٩

∴ ن − ٩ ن = ٧ (١)

∴ ٩ ن^{١٠٠} = ٩٠ ن^{٩٩}

∴ $\frac{ن^{١٠٠}}{ن^{٩٩}}$ = $\frac{ن+١}{ن}$ = $\frac{٩٠}{٩}$ = ١٠

∴ ن + ١ = ١٠ ن

∴ ن − ١٠ ن = −١ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ ن = ٧٩ ، ن = ٨

١٢

⑫ ∵ ٢ $\frac{ن!}{(ن+٢)!}$ = $\frac{(ن+١)!}{(ن+٢)!}$ = $\frac{(ن+١)!}{ن!}$

∴ $\frac{٢ن!}{ن!}$ = $\frac{(ن+٢)(ن+١)!}{ن!}$ = $\frac{ن+٢}{٢}$

∴ ل$_{ن}$ = ل$_{٢ن+٢}$

∴ ٢ ن = ن + ٢ ∴ ن = ٢ ، أ = صفر

⑬ ∵ $\frac{١}{ن!}$ + $\frac{١}{(ن+١)!}$ = $\frac{٩}{(ن+٢)!}$

(بالضرب × (ن + ٢)!)

∴ $\frac{ن+٢}{ن!}$ + $\frac{ن+٢}{(ن+١)!}$ = ٩

∴ $\frac{(ن+٢)(ن+١)!}{ن!}$ + $\frac{(ن+٢)!}{(ن+١)!}$ = ٩

∴ ن^{٢} + ٣ ن + ٢ + ن + ٢ = ٩

∴ ن^{٢} + ٤ ن − ٥ = ٠

∴ (ن + ٥) (ن − ١) = ٠

∴ ن = −٥ (مرفوض) أ، ن = ١

⑭ ∵ $\frac{ن+١}{(ن+٢)!}$ + $\frac{ن}{(ن+١)!}$ = $\frac{١٣}{٤٢}$

∴ $\frac{١}{(ن+٢)!}$ + $\frac{ن}{(ن+١)!}$ = $\frac{١٣}{٤٢}$

∴ $\frac{(ن+١)+(ن+٢)}{(ن+٢)(ن+١)!}$ = $\frac{١٣}{٤٢}$

∴ $\frac{ن^{٢}+٣ن+٢}{ن^{٢}+٣ن+٢}$ = $\frac{١٣}{٤٢}$

∴ ٤٢ (ن^{٢} + ٣ ن + ٢) = ١٣ (ن^{٢} + ٣ ن + ٢)

∴ ٨٤ ن + ١٢٦ = ١٣ ن^{٢} + ٣٩ ن + ٢٦

∴ ١٣ ن^{٢} − ٤٥ ن − ١٠٠ = ٠

∴ (ن − ٥) (١٣ ن + ٢٠) = ٠

∴ ن = ٥ أ، ن = $\frac{-٢٠}{١٣}$ (مرفوض)

⑮ ∵ $\frac{ن+٢}{ن-٤}$ = $\frac{٢ن+٣}{٢ن-٤}$

∴ $\frac{ن+٢}{ن}$ = $\frac{٢ن+٣}{٢ن-٤}$

∴ ل$_{ن+٢}$ = ل$_{٢ن-٢}$

∴ ن + ٢ = ٢ ن − ٣

∴ ن = ٥

⑯ ∵ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٣)!}$ = ٧٢ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٣)!}$

بضرب الطرفين × (٣ ن − ٦)

∴ ٢ ن $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٣)!}$ × ٣ (ن − ٢)

= ٧٢ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٣)!}$ × (٣ ن − ٦)

∴ ٣ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$ = ٧٢ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$

∴ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$ = ٢٤ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$

∴ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$ = ٤ $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$

∴ $\frac{٢ن!}{٤}$ = $\frac{٢ن!}{ن!(ن-٢)!}$

∴ ٢$^{ن-١}$ ل$_{٢ن-٤}$ = ٢$^{٢ن-٦}$ ل$_{٢ن-٤}$

∴ ٢ ن = ٣ ن − ٦ ∴ ن = ٦

١٠

① العامل الأوسط = (ن − ٣) = ٩

∴ ن = ١٢ ∴ س^{٢} − ١٢ = ٤

∴ س^{٢} = ١٦

∴ س = ٤ (ويرفض الحل السالب)

∴ |س| = |٤| = ٢٤

② ∵ ٤ ن$_{٥}$ ، ٣ ن$_{٦}$ ، ٣ ن$_{٧}$ متتابعة حسابية

∴ ٦ ن$_{٦}$ = ٤ ن$_{٥}$ + ٣ ن$_{٧}$

∴ ٦ $\frac{ن_{٦}}{ن_{٥}}$ = ٤ + ٣ $\frac{ن_{٧}}{ن_{٥}}$

∴ ٦ = ٤ $\left(\frac{٦}{ن-٦+١}\right)$ + ٣ $\left(\frac{ن-٧+١}{٧}\right)$

∴ ٦ = $\frac{٢٤}{ن-٥}$ + $\frac{٣ن-١٨}{٧}$

∴ ٦ = $\frac{٢٤ \times ٧ + (٣ن-١٨)(ن-٥)}{٧(ن-٥)}$

∴ ٤٢ (ن − ٥) = ٣ن^{٢} − ٣٣ ن + ٩٠

∴ ٣ن^{٢} − ٧٥ ن + ٢٤٠ = ٠ (وبالقسمة على ٣)

∴ ن^{٢} − ٢٥ ن + ١٥٦ = ٠

∴ (ن − ١٢) (ن − ١٣) = ٠

∴ ن = ١٢ أ، ن = ١٣

③ ∵ ٢ $\frac{١٤}{ن-ر}$ ن$_{ر-١}$ ، ٣ $\frac{١٤}{ن-ر}$ ن$_{ر}$

، ٦ $\frac{١٤}{ن-ر+١}$ ن$_{ر-١}$ متتابعة هندسية

∴ $\frac{٢\frac{١٤}{ن-ر+١}}{٣\frac{١٤}{ن-ر}}$ = $\frac{٦\frac{١٤}{ن-ر+١}}{٢\frac{١٤}{ن-ر}}$

∴ $\frac{٢}{٣}$ $\left(\frac{١٤-ر+١}{ن-ر+١}\right)$ = $\frac{١}{٢}$ $\left(\frac{١٤-ر}{ن-ر}\right)$

∴ $\frac{٢}{٣}$ $\left(\frac{١٥-ر}{ن-ر+١}\right)$ = $\frac{١}{٢}$ $\left(\frac{١٤-ر}{ن-ر}\right)$

∴ $\frac{٢٨-٢ر}{٣ن-٣ر}$ = $\frac{١٥-ر}{٢ن-٢ر}$

∴ ٥٦ − ٤ ر = ٣ ر^{٢} − ٤٢ ر + ٤٥

∴ ر^{٢} − ١٤ ر + ٤٥ = ٠

∴ (ر − ٩) (ر − ٥) = ٠

∴ ر = ٩ أ، ر = ٥

④ ∵ ل$_{٣٠٠}$ = ٩٩٠ = ١١ ل$_{٣}$

∴ ن + م = ١١ (١)

، ٢ن − ٣م = ل$_{٣}$ = ٧٢ ∴ ٢ن − م = ٩ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ ن = ٥ ، م = ٦

∴ $\frac{ن}{م}$ = $\frac{٥}{٦}$ = ١ ، ل$_{١}$ = ل$_{٥}$ = ٥

، $\frac{ن}{٢٢}$ ل$_{٣٠٠}$ = $\frac{٥}{٢٢}$ × ل$_{١١}$ = ٢٥

∴ $\frac{٢٥}{٥}$ = $\frac{٥}{١}$

∴ |م − ن| ، ل$_{١}$ ، $\frac{ن}{٢٢}$ ل$_{٣٠٠}$ فى تتابع هندسى

⑤ ∵ ل$_{٣ن}$ = س

∴ أصغر قيمة لـ س = ل$_{٣}$ = ٦

⑨ الطرف الأيمن

$= \frac{\lfloor 2ن}{\lfloor ن} \times \frac{\lfloor ن}{\lfloor (ن-1)} \times \frac{\lfloor (2ن-1)}{\lfloor (ن-1)}$

$= 2^ن \times \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن} \times \frac{\lfloor (2ن-1)}{\lfloor (ن-1)}$

$\therefore \lfloor 2ن = 2^ن \lfloor ن \times \frac{\lfloor (2ن-1)}{\lfloor (ن-1)}$

⑩ الطرف الأيمن

$= \frac{\lfloor ن}{\lfloor (ن-ر)} \times \frac{\lfloor (ن-1)}{\lfloor (ر-1) \lfloor (ن-ر)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^ن$

$= \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \lfloor (ن-ر)} \times \frac{\lfloor (ن-1)}{\lfloor (ر-1) \lfloor (ن-ر)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^ن$

$= \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \lfloor (ن-ر)} \times \frac{ر \lfloor (ن-ر)}{\lfloor ن} \times \left(\frac{1}{2}\right)^ن$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^ن \times \left(\frac{1}{2}\right)^ن = \left(\frac{1}{4}\right)^ن$

12

نفرض أن الأعداد هي ن ، ن − 1 ، ن − 2 ، ....

، ن − ر + 1

∴ حاصل الضرب = ن (ن − 1) (ن − 2) ....

(ن − ر + 1) = $ل_ر^ن$

، ∴ $ل_ر^ن = ق_ر^ن$ ، ∴ $ق_ر^ن \in ص^+$

∴ $ل_ر^ن$ يقبل القسمة على $\lfloor ر$

13

∵ $ق_{ر+2}^{ن-1} \leq ق_ر^{ن-1}$ ∴ $\frac{ق_{ر+2}^{ن-1}}{ق_ر^{ن-1}} \leq 1$

∴ $\frac{ن-ر-1}{ر+2} \leq 1$

∴ ن − ر − 1 ≤ ر + 2 ∴ ن ≤ 2ر + 3

14

∵ $ق_ر^{ن-1} \times ق_ر^{ن-1} \leq ق_{ر-1}^{ن-1} \times ق_{ر+1}^{ن-1}$

∴ $\frac{ق_ر^{ن-1}}{ق_{ر-1}^{ن-1}} \times \frac{ق_ر^{ن-1}}{ق_{ر+1}^{ن-1}} \leq 1$

∴ $\left(\frac{ن-ر+2}{ر}\right)\left(\frac{ن-ر+1}{ر+1}\right) \leq 1$

∴ $\frac{(ن-ر-1)(ن-ر+1)}{ر^2+2ر} \leq 1$

∴ $(ن-ر)^2 - 1 \leq ر^2 + 2ر + 1$

∴ $(ن-ر)^2 \leq ر^2 + 2ر + 1$

∴ $(ن-ر)^2 \leq (ر+1)^2$ ∴ ن − ر ≤ ر + 1

∴ ن ≤ 2ر + 1 (لأن ن ، ر $\in ص^+$ ، ن ≤ ر)

15

عدد عناصر $ق_1^ن$ = $ق_ر^ن$ وعدد عناصر $ق_2^ن$ = $ق_{ر-2}^ن$

∴ $ق_ر^ن = ق_{ر-2}^ن$ ∴ $\frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \lfloor (ن-ر)} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor (ر-2) \lfloor (ن-ر+2)}$

∴ $\lfloor ن-ر+2 = \lfloor ن-ر-2$

∴ (ن − ر + 2) (ن − ر + 1) = (ن − ر − 1) (ن − ر − 2)

∴ ن − ر + 2 = ن − ر − 2 ∴ ن − ر − 1 = 0

∴ ن = ر − 1

16

① (أ) ② (جـ) ③ (أ) ④ (أ) ⑤ (د)

17

① ∵ $\frac{أ+ب+جـ}{\lfloor أ \lfloor ب \lfloor جـ} = \frac{أ+ب+جـ}{\lfloor أ \lfloor (ب+جـ)} \cdot \frac{(ب+جـ)}{\lfloor ب \lfloor جـ}$

$= ق_{أ,ب+جـ}^{أ+ب+جـ} \times ق_{ب,جـ}^{ب+جـ}$

∴ $ق_{أ,ب+جـ}^{أ+ب+جـ}$ ، $ق_{ب,جـ}^{ب+جـ}$ أعداد صحيحة

∴ $ق_{أ,ب+جـ}^{أ+ب+جـ} \times ق_{ب,جـ}^{ب+جـ}$ عدد صحيح

∴ $\frac{أ+ب+جـ}{\lfloor أ \lfloor ب \lfloor جـ}$ عدد صحيح

∴ $\frac{أ+ب+جـ}{\lfloor أ \lfloor ب \lfloor جـ}$ يقبل القسمة على $\lfloor أ \lfloor ب \lfloor جـ$

② ∵ $\frac{ق_1^ن}{ق_1^{ن-1}} + 2 \times \frac{ق_2^ن}{ق_2^{ن-1}} + 3 \times \frac{ق_3^ن}{ق_3^{ن-1}} + ...$

$+ ن \times \frac{ق_ن^ن}{ق_ن^{ن-1}}$

$= \frac{ن}{1} + 2 \times \frac{ن-1+1}{2} + ... + ن \times \frac{ن-ن+1}{ن}$

$= ن + (ن-1) + ... + 1$

$= \frac{ن}{2}(ن+1)$

③ الطرف الأيمن

$= (2-1)\lfloor 1 + (3-1)\lfloor 2 + (4-1)\lfloor 3 + ...$

$+ (ن+1-1)\lfloor ن = 2\lfloor 1 - \lfloor 1 + 3\lfloor 2 - \lfloor 2$

$+ 4\lfloor 3 - \lfloor 3 + ... + (ن+1)\lfloor ن - \lfloor ن$

$= \lfloor 2 - \lfloor 1 + \lfloor 3 - \lfloor 2 + \lfloor 4 - \lfloor 3 + ...$

$+ \lfloor ن+1 - \lfloor ن$

$= \lfloor ن+1 - \lfloor 1 = \lfloor ن+1 - 1$ = الطرف الأيسر

④ ∵ $ق_0^ن + ق_1^ن + ق_2^ن + ... + ق_{20}^ن$

$= ق_1^ن + ق_3^ن + ق_5^ن + ... + ق_{17}^ن$

، باستخدام القاعدة $ق_ر^ن = ق_{ن-ر}^ن$

$= (ق_1^ن + ق_3^ن + ق_5^ن + ق_7^ن + ... + ق_{17}^ن) - (ق_1^ن)$ ، بإضافة وطرح $ق_1^ن$

$= (ق_0^ن + ق_1^ن + ق_2^ن + ... + ق_{17}^ن) - 1$

، باستخدام قانون الجمع

$= (ق_0^ن + ق_1^ن + ... + ق_{17}^ن) - 1$ وهكذا

$= ق_{17}^{17} - 1 = 2^{17} - 1$

إجابات تمارين 3

1

① $(س+ص)^5 = ق_0^5 ص^0 س^5 + ق_1^5 ص^1 س^4$

$+ ق_2^5 ص^2 س^3 + ق_3^5 ص^3 س^2 + ق_4^5 ص^4 س$

$+ ق_5^5 ص^5 س^0 = س^5 + 5 ص س^4$

$+ 10 ص^2 س^3 + 10 ص^3 س^2$

$+ 5 ص^4 س + ص^5$

② $(س-ص)^6 = ق_0^6 ص^0 س^6 - ق_1^6 ص^1 س^5$

$+ ق_2^6 ص^2 س^4 - ق_3^6 ص^3 س^3$

$+ ق_4^6 ص^4 س^2 - ق_5^6 ص^5 س$

$+ ق_6^6 ص^6 س^0$

$= س^6 - 6 ص س^5 + 15 ص^2 س^4$

$- 20 ص^3 س^3 + 15 ص^4 س^2$

$- 6 ص^5 س + ص^6$

③ $(2س+3ص)^4$

$= ق_0^4 (2س)^4 (3ص)^0 + ق_1^4 (2س)^3 (3ص)^1$

$+ ق_2^4 (2س)^2 (3ص)^2 + ق_3^4 (2س)^1 (3ص)^3$

$+ ق_4^4 (2س)^0 (3ص)^4$

$= 16 س^4 + 96 ص س^3 + 216 ص^2 س^2$

$+ 216 ص^3 س + 81 ص^4$

④ $(1-2س)^5 = ق_0^5 (2س)^0$

$- ق_1^5 (2س)^1 + ق_2^5 (2س)^2$

$- ق_3^5 (2س)^3 + ق_4^5 (2س)^4$

$- ق_5^5 (2س)^5$

$= 1 - 10س + 40س^2 - 80س^3 + 80س^4 - 32س^5$

⑤ $\left(\frac{2}{س} + \frac{س}{2}\right)^6 = ق_0^6 \left(\frac{2}{س}\right)^6$

$+ ق_1^6 \left(\frac{2}{س}\right)^5 \left(\frac{س}{2}\right) + ق_2^6 \left(\frac{2}{س}\right)^4 \left(\frac{س}{2}\right)^2$

$+ ق_3^6 \left(\frac{2}{س}\right)^3 \left(\frac{س}{2}\right)^3 + ق_4^6 \left(\frac{2}{س}\right)^2 \left(\frac{س}{2}\right)^4$

$+ ق_5^6 \left(\frac{2}{س}\right)^1 \left(\frac{س}{2}\right)^5 + ق_6^6 \left(\frac{س}{2}\right)^6$

$= \frac{64}{س^6} + \frac{96}{س^4} + 60 + 20س^2 + \frac{15س^4}{16} + \frac{3س^5}{32} + \frac{س^6}{64}$

⑥ $\left(س - \frac{1}{س}\right)^5 = ق_0^5 (س)^5$

$- ق_1^5 (س)^4 \left(\frac{1}{س}\right) + ق_2^5 (س)^3 \left(\frac{1}{س}\right)^2$

$- ق_3^5 (س)^2 \left(\frac{1}{س}\right)^3 + ق_4^5 (س)^1 \left(\frac{1}{س}\right)^4$

$- ق_5^5 \left(\frac{1}{س}\right)^5 = س^5 - 5س^3$

$+ 10س - \frac{10}{س} + \frac{5}{س^3} - \frac{1}{س^5}$

⑦ $\left(2س - \frac{3}{س^2}\right)^5$

$= ق_0^5 \left(\frac{3}{س^2}\right)^0 (2س)^5 - ق_1^5 \left(\frac{3}{س^2}\right)^1 (2س)^4$

$+ ق_2^5 \left(\frac{3}{س^2}\right)^2 (2س)^3 - ق_3^5 \left(\frac{3}{س^2}\right)^3 (2س)^2$

$+ ق_4^5 \left(\frac{3}{س^2}\right)^4 (2س)^1 - ق_5^5 \left(\frac{3}{س^2}\right)^5$

$= 32س^5 - 120س^2 + 180س^{-1} - 135س^{-4}$

$+ \frac{405}{8س^7} - \frac{243}{32س^{10}}$

⑧ $(1-س)^5 (1+س)^4 = (1-س^2)^5$

$= ق_0^5 (س^2)^5 - ق_1^5 (س^2)^4 + ق_2^5 (س^2)^3$

$- ق_3^5 (س^2)^2 + ق_4^5 (س^2)^1 - ق_5^5 (س^2)^0$

$= 1 - 5س^2 + 10س^4 - 10س^6 + 5س^8$

$- س^{10}$

⑨ $\left(1 + \left(س - \frac{1}{س}\right)\right)^2 = 1 + ق_1^2 \left(س - \frac{1}{س}\right)$

$+ ق_2^2 \left(س - \frac{1}{س}\right)^2$

$= 1 + 2س - \frac{2}{س} + 2 + \left[س^2 - 2 + \frac{1}{س^2}\right]$

$+ \left[ق_1^2 \left(\frac{1}{س}\right)(س) + ق_2^2 \left(\frac{1}{س}\right)^2 (س)^2\right]$

$= 1 + 2س - \frac{2}{س} + 2 + س^2 - 6 + \frac{2}{س}$

$+ س^2 - 2 + \frac{1}{س^2}$

$= 2س^2 + \frac{3}{س^2} - 5 - \frac{1}{س^2}$

2

① $(س+2)^4 - (س-2)^4 = 2\left[ق_1^4 س^3 + ق_3^4 (2)^3 س\right]$

$= 2\left[ق_1^4 (2) س^3 + ق_3^4 (2)^3 س\right]$

② $(س-2)^5 = ق_0^5 (س)^5 - ق_1^5 (س)^4 (2)$

$+ ق_2^5 (س)^3 (2)^2 - ق_3^5 (س)^2 (2)^3$

$+ ق_4^5 (س)^1 (2)^4 - ق_5^5 (2)^5$

$= س^5 - 10س^4 + 40س^3 - 80س^2 + 80س - 32$

$\therefore (س+2)^5 + (س-2)^5 = 2\left[ق_0^5 س^5 + ق_2^5 (2)^2 س^3 + ق_4^5 (2)^4 س\right]$

$= 2\left[س^5 + 20س^3 + 80س\right]$

③ $(س+ص)^4 = ق_0^4 س^4 + ق_1^4 س^3 ص$

$+ ق_2^4 س^2 ص^2 + ق_3^4 س ص^3 + ق_4^4 ص^4$

$(س-ص)^4 = ق_0^4 س^4 - ق_1^4 س^3 ص$

$+ ق_2^4 س^2 ص^2 - ق_3^4 س ص^3 + ق_4^4 ص^4$

$\therefore (س+ص)^4 + (س-ص)^4 = 2\left[ق_0^4 س^4 + ق_2^4 س^2 ص^2 + ق_4^4 ص^4\right]$

$= 2\left[س^4 + 6س^2 ص^2 + ص^4\right]$

④ $(س+ص+ع)^3 = ق_0^3 (س+ص)^3 ع^0$

$+ ق_1^3 (س+ص)^2 ع^1 + ق_2^3 (س+ص)^1 ع^2$

$+ ق_3^3 (س+ص)^0 ع^3$

$= (س+ص)^3 + 3(س+ص)^2 ع + 3(س+ص) ع^2 + ع^3$

$= س^3 + 3س^2 ص + 3س ص^2 + ص^3$

$+ 3(س^2 + 2س ص + ص^2) ع + 3(س+ص) ع^2 + ع^3$

$= س^3 + ص^3 + ع^3 + 3س^2 ص + 3س ص^2$

$+ 3س^2 ع + 6س ص ع + 3ص^2 ع + 3س ع^2 + 3ص ع^2$

⑤ $(س+ص+ع)^4 = [(س+ص)+ع]^4$

$= ق_0^4 (س+ص)^4 ع^0 + ق_1^4 (س+ص)^3 ع^1$

$+ ق_2^4 (س+ص)^2 ع^2 + ق_3^4 (س+ص)^1 ع^3$

$+ ق_4^4 (س+ص)^0 ع^4$

$= (س+ص)^4 + 4(س+ص)^3 ع + 6(س+ص)^2 ع^2$

$+ 4(س+ص) ع^3 + ع^4$

$= س^4 + 4س^3 ص + 6س^2 ص^2 + 4س ص^3 + ص^4$

$+ 4(س^3 + 3س^2 ص + 3س ص^2 + ص^3) ع$

$+ 6(س^2 + 2س ص + ص^2) ع^2 + 4(س+ص) ع^3 + ع^4$

$= س^4 + ص^4 + ع^4 + 4س^3 ص + 6س^2 ص^2$

$+ 4س ص^3 + 4س^3 ع + 12س^2 ص ع + 12س ص^2 ع$

$+ 4ص^3 ع + 6س^2 ع^2 + 6ص^2 ع^2 + 12س ص ع^2$

$+ 4س ع^3 + 4ص ع^3$

⑥ $(س+ص)^5 = ق_0^5 س^5 + ق_1^5 س^4 ص$

$+ ق_2^5 س^3 ص^2 + ق_3^5 س^2 ص^3$

$+ ق_4^5 س ص^4 + ق_5^5 ص^5$

$= س^5 + 5س^4 ص + 10س^3 ص^2$

$+ 10س^2 ص^3 + 5س ص^4 + ص^5$

$(س-ص)^5 = ق_0^5 س^5 - ق_1^5 س^4 ص$

$+ ق_2^5 س^3 ص^2 - ق_3^5 س^2 ص^3$

$+ ق_4^5 س ص^4 - ق_5^5 ص^5$

$= س^5 - 5س^4 ص + 10س^3 ص^2$

$- 10س^2 ص^3 + 5س ص^4 - ص^5$

$\therefore (س+ص)^5 + (س-ص)^5$

$= 2\left[س^5 + 10س^3 ص^2 + 5س ص^4\right]$

$= 2\left[س^5 + 10س^3 (2)^2 + 5س (2)^4\right]$

$= 2\left[س^5 + 40س^3 + 80س\right]$

$= 2س^5 + 80س^3 + 160س$

⑦ $(س+2)^4 = ق_0^4 س^4 + ق_1^4 س^3 (2)$

$+ ق_2^4 س^2 (2)^2 + ق_3^4 س (2)^3 + ق_4^4 (2)^4$

$(س-2)^4 = ق_0^4 س^4 - ق_1^4 س^3 (2)$

$+ ق_2^4 س^2 (2)^2 - ق_3^4 س (2)^3 + ق_4^4 (2)^4$

$\therefore (س+2)^4 + (س-2)^4$

$= 2\left[ق_0^4 س^4 + ق_2^4 س^2 (2)^2 + ق_4^4 (2)^4\right]$

$= 2\left[س^4 + 6س^2 (4) + 1(16)\right] = 2\left[س^4 + 12س^2 + 16\right]$

$= 2س^4 + 24س^2 + 32$

⑧ $(س+2)^5 = ق_0^5 س^5 + ق_1^5 س^4 (2)$

$+ ق_2^5 س^3 (2)^2 + ق_3^5 س^2 (2)^3$

$+ ق_4^5 س (2)^4 + ق_5^5 (2)^5$

$(س-2)^5 = ق_0^5 س^5 - ق_1^5 س^4 (2)$

$+ ق_2^5 س^3 (2)^2 - ق_3^5 س^2 (2)^3$

$+ ق_4^5 س (2)^4 - ق_5^5 (2)^5$

$\therefore (س+2)^5 - (س-2)^5$

$= 2\left[ق_1^5 س^4 (2) + ق_3^5 س^2 (2)^3 + ق_5^5 (2)^5\right]$

$= 2\left[10س^4 + 80س^2 + 32\right]$

$= 20س^4 + 160س^2 + 64$

⑨ $(س+ص)^6 = ق_0^6 س^6 + ق_1^6 س^5 ص$

$+ ق_2^6 س^4 ص^2 + ق_3^6 س^3 ص^3$

$+ ق_4^6 س^2 ص^4 + ق_5^6 س ص^5 + ق_6^6 ص^6$

$(س-ص)^6 = ق_0^6 س^6 - ق_1^6 س^5 ص$

$+ ق_2^6 س^4 ص^2 - ق_3^6 س^3 ص^3$

$+ ق_4^6 س^2 ص^4 - ق_5^6 س ص^5 + ق_6^6 ص^6$

$\therefore (س+ص)^6 + (س-ص)^6$

$= 2\left[ق_0^6 س^6 + ق_2^6 س^4 ص^2 + ق_4^6 س^2 ص^4 + ق_6^6 ص^6\right]$

$= 2\left[س^6 + 15س^4 ص^2 + 15س^2 ص^4 + ص^6\right]$

⑩ $(س+ص+ع)^3 = [(س+ص)+ع]^3$

$= ق_0^3 (س+ص)^3 ع^0 + ق_1^3 (س+ص)^2 ع^1$

$+ ق_2^3 (س+ص)^1 ع^2 + ق_3^3 (س+ص)^0 ع^3$

$= (س+ص)^3 + 3(س+ص)^2 ع + 3(س+ص) ع^2 + ع^3$

$= س^3 + 3س^2 ص + 3س ص^2 + ص^3$

$+ 3(س^2 + 2س ص + ص^2) ع + 3(س+ص) ع^2 + ع^3$

$= س^3 + ص^3 + ع^3 + 3س^2 ص + 3س ص^2$

$+ 3س^2 ع + 6س ص ع + 3ص^2 ع + 3س ع^2 + 3ص ع^2$

⑪ $(1+س+س^2)^5 = [1+(س+س^2)]^5$

$= ق_0^5 (1)^5 + ق_1^5 (1)^4 (س+س^2)$

$+ ق_2^5 (1)^3 (س+س^2)^2 + ق_3^5 (1)^2 (س+س^2)^3$

$+ ق_4^5 (1)^1 (س+س^2)^4 + ق_5^5 (س+س^2)^5$

$= 1 + 5(س+س^2) + 10(س^2 + 2س^3 + س^4)$

$+ 10(س^3 + 3س^4 + 3س^5 + س^6)$

$+ 5(س^4 + 4س^5 + 6س^6 + 4س^7 + س^8)$

$+ (س^5 + 5س^6 + 10س^7 + 10س^8 + 5س^9 + س^{10})$

$= 1 + 5س + 15س^2 + 30س^3 + 45س^4$

$+ 51س^5 + 45س^6 + 30س^7 + 15س^8 + 5س^9 + س^{10}$

⑫ $(1+س+ص)^4 = [1+(س+ص)]^4$

$= ق_0^4 (1)^4 + ق_1^4 (1)^3 (س+ص)$

$+ ق_2^4 (1)^2 (س+ص)^2 + ق_3^4 (1)^1 (س+ص)^3$

$+ ق_4^4 (س+ص)^4$

$= 1 + 4(س+ص) + 6(س^2 + 2س ص + ص^2)$

$+ 4(س^3 + 3س^2 ص + 3س ص^2 + ص^3)$

$+ (س^4 + 4س^3 ص + 6س^2 ص^2 + 4س ص^3 + ص^4)$

$= 1 + 4س + 4ص + 6س^2 + 12س ص + 6ص^2$

$+ 4س^3 + 12س^2 ص + 12س ص^2 + 4ص^3$

$+ س^4 + 4س^3 ص + 6س^2 ص^2 + 4س ص^3 + ص^4$

⑬ $(س+ص+ع+ك)^3 = [(س+ص+ع)+ك]^3$

$= ق_0^3 (س+ص+ع)^3 ك^0 + ق_1^3 (س+ص+ع)^2 ك^1$

$+ ق_2^3 (س+ص+ع)^1 ك^2 + ق_3^3 (س+ص+ع)^0 ك^3$

$= (س+ص+ع)^3 + 3(س+ص+ع)^2 ك$

$+ 3(س+ص+ع) ك^2 + ك^3$

$= س^3 + ص^3 + ع^3 + 3س^2 ص + 3س ص^2$

$+ 3س^2 ع + 6س ص ع + 3ص^2 ع + 3س ع^2 + 3ص ع^2$

$+ 3(س^2 + ص^2 + ع^2 + 2س ص + 2س ع + 2ص ع) ك$

$+ 3(س+ص+ع) ك^2 + ك^3$

$= س^3 + ص^3 + ع^3 + ك^3 + 3س^2 ص + 3س ص^2$

$+ 3س^2 ع + 6س ص ع + 3ص^2 ع + 3س ع^2 + 3ص ع^2$

$+ 3س^2 ك + 3ص^2 ك + 3ع^2 ك + 6س ص ك$

$+ 6س ع ك + 6ص ع ك + 3س ك^2 + 3ص ك^2 + 3ع ك^2$

⑭ $(1+س+ص+ع)^4 = [1+(س+ص+ع)]^4$

$= ق_0^4 (1)^4 + ق_1^4 (1)^3 (س+ص+ع)$

$+ ق_2^4 (1)^2 (س+ص+ع)^2 + ق_3^4 (1)^1 (س+ص+ع)^3$

$+ ق_4^4 (س+ص+ع)^4$

$= 1 + 4(س+ص+ع) + 6(س^2 + ص^2 + ع^2 + 2س ص + 2س ع + 2ص ع)$

$+ 4(س^3 + ص^3 + ع^3 + 3س^2 ص + 3س ص^2 + 3س^2 ع + 6س ص ع + 3ص^2 ع + 3س ع^2 + 3ص ع^2)$

$+ (س^4 + ص^4 + ع^4 + 4س^3 ص + 4س ص^3 + 4س^3 ع + 12س^2 ص ع + 12س ص^2 ع + 4ص^3 ع + 6س^2 ع^2 + 6ص^2 ع^2 + 12س ص ع^2 + 4س ع^3 + 4ص ع^3)$

$= 1 + 4س + 4ص + 4ع + 6س^2 + 6ص^2 + 6ع^2 + 12س ص + 12س ع + 12ص ع$

$+ 4س^3 + 4ص^3 + 4ع^3 + 12س^2 ص + 12س ص^2 + 12س^2 ع + 24س ص ع + 12ص^2 ع + 12س ع^2 + 12ص ع^2$

$+ س^4 + ص^4 + ع^4 + 4س^3 ص + 4س ص^3 + 4س^3 ع + 12س^2 ص ع + 12س ص^2 ع + 4ص^3 ع + 6س^2 ع^2 + 6ص^2 ع^2 + 12س ص ع^2 + 4س ع^3 + 4ص ع^3$

⑮ $(س+ص+ع+ك+ل)^3 = [(س+ص+ع+ك)+ل]^3$

$= ق_0^3 (س+ص+ع+ك)^3 ل^0 + ق_1^3 (س+ص+ع+ك)^2 ل^1$

$+ ق_2^3 (س+ص+ع+ك)^1 ل^2 + ق_3^3 (س+ص+ع+ك)^0 ل^3$

$= (س+ص+ع+ك)^3 + 3(س+ص+ع+ك)^2 ل$

$+ 3(س+ص+ع+ك) ل^2 + ل^3$

$= س^3 + ص^3 + ع^3 + ك^3 + 3س^2 ص + 3س ص^2$

$+ 3س^2 ع + 6س ص ع + 3ص^2 ع + 3س ع^2 + 3ص ع^2$

$+ 3س^2 ك + 3ص^2 ك + 3ع^2 ك + 6س ص ك$

$+ 6س ع ك + 6ص ع ك + 3س ك^2 + 3ص ك^2 + 3ع ك^2$

$+ 3(س^2 + ص^2 + ع^2 + ك^2 + 2س ص + 2س ع + 2ص ع + 2س ك + 2ص ك + 2ع ك) ل$

$+ 3(س+ص+ع+ك) ل^2 + ل^3$

$= س^3 + ص^3 + ع^3 + ك^3 + ل^3 + 3س^2 ص + 3س ص^2$

$+ 3س^2 ع + 6س ص ع + 3ص^2 ع + 3س ع^2 + 3ص ع^2$

$+ 3س^2 ك + 3ص^2 ك + 3ع^2 ك + 6س ص ك$

$+ 6س ع ك + 6ص ع ك + 3س ك^2 + 3ص ك^2 + 3ع ك^2$

$+ 3س^2 ل + 3ص^2 ل + 3ع^2 ل + 3ك^2 ل + 6س ص ل$

$+ 6س ع ل + 6ص ع ل + 6س ك ل + 6ص ك ل + 6ع ك ل$

$+ 3س ل^2 + 3ص ل^2 + 3ع ل^2 + 3ك ل^2$

3

① $ق_ر^ن = ق_{ن-ر}^ن$

② $ق_ر^ن + ق_{ر+1}^ن = ق_{ر+1}^{ن+1}$

③ $ق_ر^ن = ق_{ن-ر}^ن$

$\therefore ق_0^ن + ق_1^ن + ق_2^ن + ... + ق_ن^ن$

$= ق_ن^ن + ق_{ن-1}^ن + ق_{ن-2}^ن + ... + ق_0^ن$

$\therefore 2(ق_0^ن + ق_1^ن + ق_2^ن + ... + ق_ن^ن)$

$= (ق_0^ن + ق_ن^ن) + (ق_1^ن + ق_{ن-1}^ن) + (ق_2^ن + ق_{ن-2}^ن) + ...$

$= ق_0^{ن+1} + ق_1^{ن+1} + ق_2^{ن+1} + ... + ق_ن^{ن+1}$

$= 2^{ن+1}$

$\therefore ق_0^ن + ق_1^ن + ق_2^ن + ... + ق_ن^ن = 2^ن$

④ $(1+س)^ن = ق_0^ن + ق_1^ن س + ق_2^ن س^2 + ... + ق_ن^ن س^ن$

$(1-س)^ن = ق_0^ن - ق_1^ن س + ق_2^ن س^2 - ... + (-1)^ن ق_ن^ن س^ن$

$\therefore (1+س)^ن + (1-س)^ن$

$= 2(ق_0^ن + ق_2^ن س^2 + ق_4^ن س^4 + ...)$

⑤ $(1+س)^ن = ق_0^ن + ق_1^ن س + ق_2^ن س^2 + ... + ق_ن^ن س^ن$

$(1-س)^ن = ق_0^ن - ق_1^ن س + ق_2^ن س^2 - ... + (-1)^ن ق_ن^ن س^ن$

$\therefore (1+س)^ن - (1-س)^ن$

$= 2(ق_1^ن س + ق_3^ن س^3 + ق_5^ن س^5 + ...)$

⑥ $(1+س)^ن = ق_0^ن + ق_1^ن س + ق_2^ن س^2 + ... + ق_ن^ن س^ن$

$(1-س)^ن = ق_0^ن - ق_1^ن س + ق_2^ن س^2 - ... + (-1)^ن ق_ن^ن س^ن$

$\therefore (1+س)^ن + (1-س)^ن$

$= 2(ق_0^ن + ق_2^ن س^2 + ق_4^ن س^4 + ...)$

$\therefore$ عند $س = 1$:

$2^ن = 2(ق_0^ن + ق_2^ن + ق_4^ن + ...)$

$\therefore ق_0^ن + ق_2^ن + ق_4^ن + ... = 2^{ن-1}$

⑦ $(1+س)^ن - (1-س)^ن$

$= 2(ق_1^ن س + ق_3^ن س^3 + ق_5^ن س^5 + ...)$

$\therefore$ عند $س = 1$:

$2^ن = 2(ق_1^ن + ق_3^ن + ق_5^ن + ...)$

$\therefore ق_1^ن + ق_3^ن + ق_5^ن + ... = 2^{ن-1}$

⑧ $(1+س)^ن = ق_0^ن + ق_1^ن س + ق_2^ن س^2 + ... + ق_ن^ن س^ن$

$(1-س)^ن = ق_0^ن - ق_1^ن س + ق_2^ن س^2 - ... + (-1)^ن ق_ن^ن س^ن$

$(1+س)^ن (1-س)^ن = (1-س^2)^ن$

$= ق_0^ن - ق_1^ن س^2 + ق_2^ن س^4 - ... + (-1)^ن ق_ن^ن س^{2ن}$

$\therefore (ق_0^ن + ق_1^ن س + ق_2^ن س^2 + ...)(ق_0^ن - ق_1^ن س + ق_2^ن س^2 - ...)$

$= ق_0^ن - ق_1^ن س^2 + ق_2^ن س^4 - ...$

$\therefore (ق_0^ن)^2 - (ق_1^ن)^2 س^2 + (ق_2^ن)^2 س^4 - ...$

$= ق_0^ن - ق_1^ن س^2 + ق_2^ن س^4 - ...$

$\therefore (ق_0^ن)^2 + (ق_1^ن)^2 س^2 + (ق_2^ن)^2 س^4 + ...$

$= ق_0^{2ن} + ق_2^{2ن} س^2 + ق_4^{2ن} س^4 + ...$

$\therefore (ق_0^ن)^2 + (ق_1^ن)^2 + (ق_2^ن)^2 + ...$

$= ق_0^{2ن} + ق_2^{2ن} + ق_4^{2ن} + ...$

$= 2^{2ن-1}$

4

① $(س+ص)^ن = ق_0^ن س^ن + ق_1^ن س^{ن-1} ص$

$+ ق_2^ن س^{ن-2} ص^2 + ... + ق_ن^ن ص^ن$

$(س-ص)^ن = ق_0^ن س^ن - ق_1^ن س^{ن-1} ص$

$+ ق_2^ن س^{ن-2} ص^2 - ... + (-1)^ن ق_ن^ن ص^ن$

$\therefore (س+ص)^ن + (س-ص)^ن$

$= 2(ق_0^ن س^ن + ق_2^ن س^{ن-2} ص^2 + ق_4^ن س^{ن-4} ص^4 + ...)$

② $(س+ص)^ن = ق_0^ن س^ن + ق_1^ن س^{ن-1} ص$

$+ ق_2^ن س^{ن-2} ص^2 + ... + ق_ن^ن ص^ن$

$(س-ص)^ن = ق_0^ن س^ن - ق_1^ن س^{ن-1} ص$

$+ ق_2^ن س^{ن-2} ص^2 - ... + (-1)^ن ق_ن^ن ص^ن$

$\therefore (س+ص)^ن - (س-ص)^ن$

$= 2(ق_1^ن س^{ن-1} ص + ق_3^ن س^{ن-3} ص^3 + ق_5^ن س^{ن-5} ص^5 + ...)$

③ $(س+ص)^ن = ق_0^ن س^ن + ق_1^ن س^{ن-1} ص$

$+ ق_2^ن س^{ن-2} ص^2 + ... + ق_ن^ن ص^ن$

$(س-ص)^ن = ق_0^ن س^ن - ق_1^ن س^{ن-1} ص$

$+ ق_2^ن س^{ن-2} ص^2 - ... + (-1)^ن ق_ن^ن ص^ن$

$\therefore (س+ص)^ن + (س-ص)^ن$

$= 2(ق_0^ن س^ن + ق_2^ن س^{ن-2} ص^2 + ق_4^ن س^{ن-4} ص^4 + ...)$

$\therefore$ عند $س = ص = 1$:

$2^ن = 2(ق_0^ن + ق_2^ن + ق_4^ن + ...)$

$\therefore ق_0^ن + ق_2^ن + ق_4^ن + ... = 2^{ن-1}$

④ $(س+ص)^ن - (س-ص)^ن$

$= 2(ق_1^ن س^{ن-1} ص + ق_3^ن س^{ن-3} ص^3 + ق_5^ن س^{ن-5} ص^5 + ...)$

$\therefore$ عند $س = ص = 1$:

$2^ن = 2(ق_1^ن + ق_3^ن + ق_5^ن + ...)$

$\therefore ق_1^ن + ق_3^ن + ق_5^ن + ... = 2^{ن-1}$

⑤ $(س+ص)^ن = ق_0^ن س^ن + ق_1^ن س^{ن-1} ص$

$+ ق_2^ن س^{ن-2} ص^2 + ... + ق_ن^ن ص^ن$

$(س-ص)^ن = ق_0^ن س^ن - ق_1^ن س^{ن-1} ص$

$+ ق_2^ن س^{ن-2} ص^2 - ... + (-1)^ن ق_ن^ن ص^ن$

$(س+ص)^ن (س-ص)^ن = (س^2 - ص^2)^ن$

$= ق_0^ن س^{2ن} - ق_1^ن س^{2ن-2} ص^2 + ق_2^ن س^{2ن-4} ص^4 - ... + (-1)^ن ق_ن^ن ص^{2ن}$

$\therefore (ق_0^ن س^ن + ق_1^ن س^{ن-1} ص + ق_2^ن س^{ن-2} ص^2 + ...)$

$(ق_0^ن س^ن - ق_1^ن س^{ن-1} ص + ق_2^ن س^{ن-2} ص^2 - ...)$

$= ق_0^ن س^{2ن} - ق_1^ن س^{2ن-2} ص^2 + ق_2^ن س^{2ن-4} ص^4 - ...$

$\therefore (ق_0^ن)^2 س^{2ن} - (ق_1^ن)^2 س^{2ن-2} ص^2 + (ق_2^ن)^2 س^{2ن-4} ص^4 - ...$

$= ق_0^ن س^{2ن} - ق_1^ن س^{2ن-2} ص^2 + ق_2^ن س^{2ن-4} ص^4 - ...$

$\therefore (ق_0^ن)^2 س^{2ن} + (ق_1^ن)^2 س^{2ن-2} ص^2 + (ق_2^ن)^2 س^{2ن-4} ص^4 + ...$

$= ق_0^{2ن} س^{2ن} + ق_2^{2ن} س^{2ن-2} ص^2 + ق_4^{2ن} س^{2ن-4} ص^4 + ...$

$\therefore (ق_0^ن)^2 + (ق_1^ن)^2 + (ق_2^ن)^2 + ...$

$= ق_0^{2ن} + ق_2^{2ن} + ق_4^{2ن} + ...$

$= 2^{2ن-1}$

، $ح_{١٠} = {}^{٢٠}ق_{١٠} (-س)^{١٠}$

⑨ الحدين الأوسطين فى مفكوك $(١ + س)^{٢٠ - ٥٢}$

هما $ح_{١٠}$ ، $ح_{١١}$

، $ح_{١٠} = {}^{٥٢-١}ق_{١٠} س^{١٠-١}$

، $ح_{١١} = {}^{٥٢-١}ق_{١٠} س^{١٠}$

⑩ الحد الرابع من النهاية فى مفكوك

$س^{٤} \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٩}$ هو الحد الرابع من البداية

فى مفكوك $س^{٤} \left(\frac{-١}{س} + س\right)^{٩}$

، $ح_{٤} = (س^{٤})^{٦} {}^{٩}ق_{٣} س^{٣} \left(\frac{-١}{س}\right)^{٣} = ٨٤ س$

⑪ $١ + {}^{١٢}ق_{١} س + {}^{١٢}ق_{٢} س^{٢} + ... + {}^{١٢}ق_{١٢} س^{١٢}$

$= (١ + س)^{١٢}$ ∴ الحد الأوسط هو $ح_{٧}$

، $ح_{٧} = {}^{١٢}ق_{٦} س^{٦} = ٩٢٤ س^{٦}$

⑫ $(٢ س + ١)^{١٠} + {}^{١٠}ق_{١} (٢ س + ١)^{٩} (س - ٣)$

$+ {}^{١٠}ق_{٢} (٢ س + ١)^{٨} (س - ٣)^{٢} + ...$

$+ (س - ٣)^{١٠} = [(٢ س + ١) + (س - ٣)]^{١٠}$

$= (٣ س - ٢)^{١٠}$

، الحد الأوسط هو $ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥} (-٢)^{٥} (٣ س)^{٥}$

$= -١٩٥٩٥٥٢ س^{٥}$

⑬ $(٣ + س)^{١١} - {}^{١١}ق_{١} (٣ + س)^{١٠} (١ - ٢ س)$

$+ {}^{١١}ق_{٢} (٣ + س)^{٩} (١ - ٢ س)^{٢} - ...$

$- (١ - ٢ س)^{١١} = [(٣ + س) - (١ - ٢ س)]^{١١}$

$= (٢ + ٣ س)^{١١}$

∴ $ح_{٥} = {}^{١١}ق_{٤} (٣ س)^{٤} (٢)^{٧}$

$= ٣٤٢١٤٤٠ س^{٤}$

$+ ٢٥٢ س^{٢} (١ - س)^{٦} + ... + ٦٥٦١ س^{٨}$

$= [(١ - س) + ٣ س]^{٨} = (١ + ٢ س)^{٨}$

، $ح_{٦} = {}^{٨}ق_{٥} (٢ س)^{٥} = ١٧٩٢ س^{٥}$

، القيمة العددية عند س = ١ هى ١٧٩٢ $(١)^{٥} = ١٧٩٢$

⑮ مفكوك $(٣ + ٢ س)^{٨} + (٣ - ٢ س)^{٨}$

$= ٢ [ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + ح_{٧} + ح_{٩}]$

∴ الحد الأوسط $= ٢ ح_{٥} = ٢ ({}^{٨}ق_{٤}) (٢ س)^{٤} (٣)^{٤}$

$= ١٨١٤٤٠ س^{٤}$

٧

① $١ + ٨ س + {}^{٨}ق_{٢} س^{٢} + ... + س^{٨}$

$= (١ + س)^{٨} = ٢٥٦$

∴ $١ + س = \pm ٢$

∴ $١ + س = ٢$ ومنها $س = ١$

أو $١ + س = -٢$ ومنها $س = -٣$

② $(١ + \sqrt{٣})^{٦} - (١ - \sqrt{٣})^{٦} = ٢ [ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥}]$

$= ٢ [{}^{٦}ق_{١} (\sqrt{٣})^{١} + {}^{٦}ق_{٣} (\sqrt{٣})^{٣} + {}^{٦}ق_{٥} (\sqrt{٣})^{٥}]$

$= ٢ [٦ \sqrt{٣} + ٦٠ \sqrt{٣} + ٥٤ \sqrt{٣}] = ٢٤٠ \sqrt{٣}$

∴ $٤٨٠ \sqrt{٣} س = ٢٤٠ \sqrt{٣}$ ∴ $س = \frac{١}{٢}$

③ $\left(\frac{١}{٢} س\right)^{١٠} - ١٠ \times ٣ \left(\frac{١}{٢} س\right)^{٩} + ٤٥$

$\times ٣^{٢} \left(\frac{١}{٢} س\right)^{٨} - ١٢٠ \times ٣^{٣} \left(\frac{١}{٢} س\right)^{٧} + ... + ٣^{١٠}$

$= \left(\frac{١}{٢} س - ٣\right)^{١٠}$

∴ $\left(\frac{١}{٢} س - ٣\right)^{١٠} = ١٠٢٤ = (\pm ٢)^{١٠}$

∴ $\frac{١}{٢} س - ٣ = \pm ٢$

∴ $\frac{١}{٢} س - ٣ = ٢$ ومنها $س = ١٠$

أو $\frac{١}{٢} س - ٣ = -٢$ ومنها $س = ٢$

$+ ... + س^{٢٠} = (١ + س)^{٢٠}$

، $س^{١٩} + ١٨ س^{١٧} + ١٥٣ س^{١٦} + ... + ١$

$= (س + ١)^{١٨}$

∴ $(١ + س)^{٢٠} = (١ + س)^{١٨}$

∴ $(١ + س)^{٢} = ١$ ∴ $١ + س = \pm ١$

∴ $١ + س = ١$ ومنها $س =$ صفر

أو $١ + س = -١$ ومنها $س = -٢$

⑤ $(٢ + س)^{٧} + ٧ س^{٢} (٢ + س)^{٦} + \frac{٧ \times ٦}{١ \times ٢} س^{٤}$

$(٢ + س)^{٥} + ... + س^{١٤} = ((٢ + س) + س^{٢})^{٧}$

∴ الحدان الأوسطان هما $ح_{٤}$ ، $ح_{٥}$

∴ $ح_{٤} = {}^{٧}ق_{٣} (س^{٢})^{٤} (٢ + س)^{٣}$

$= {}^{٧}ق_{٣} س^{٦} (٢ + س)^{٣}$

، $ح_{٥} = {}^{٧}ق_{٤} (س^{٢})^{٣} (٢ + س)^{٤}$

$= {}^{٧}ق_{٤} س^{٨} (٢ + س)^{٤}$

∴ ${}^{٧}ق_{٣} س^{٦} (٢ + س)^{٣} = {}^{٧}ق_{٤} س^{٨} (٢ + س)^{٤}$

∴ $٢ + س = س^{٢}$ ∴ $س^{٢} - س - ٢ = ٠$

∴ $(س - ٢)(س + ١) = ٠$

ومنها $س = ٢$ أو $س = -١$

⑥ الحد الأوسط فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{٢ س}\right)^{١٠}$

هو الحد السادس

∴ $ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥} \left(\frac{١}{٢ س}\right)^{٥} (س^{٢})^{٥} = \frac{٦٣}{٨} س^{٥}$

∴ $\frac{٦٣}{٨} س^{٥} = \frac{٢٨}{٢٧}$ ∴ $س^{٥} = \frac{٣٢}{٢٤٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥}$

∴ $س = \frac{٢}{٣}$

⑦ الحدان الأوسطان فى مفكوك $\left(\frac{٢}{س} + \frac{س^{٢}}{-٨}\right)^{٩}$

هما $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$

، $ح_{٥} = {}^{٩}ق_{٤} \left(\frac{س^{٢}}{-٨}\right)^{٤} \left(\frac{٢}{س}\right)^{٥} = \frac{٦٣}{٦٤} س^{٧}$

∴ $\frac{٦٣}{١٠٢٤} س^{١١} = \frac{٦٣}{٦٤} س^{٧}$

∴ $س^{٤} = ١٦ = (\pm ٢)^{٤}$ ∴ $س = \pm ٢$

⑧ الحدان الأوسطان فى مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٩}$

هما $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$

∴ $ح_{٥} + ح_{٦} =$ صفر

∴ ${}^{٩}ق_{٤} \left(\frac{١}{س}\right)^{٤} (س)^{٥} + {}^{٩}ق_{٥} \left(\frac{١}{س}\right)^{٥} س^{١} = ٠$

∴ ${}^{٩}ق_{٤} \times \frac{١}{س^{٤}} = - {}^{٩}ق_{٥} \times \frac{١}{س^{٥}}$

∴ $\frac{{}^{٩}ق_{٤}}{{}^{٩}ق_{٥}} = - \frac{١}{س^{٢}} \times س^{٦}$

∴ $\frac{٩ - ٥ + ١}{٥} = - س^{٢}$

∴ $س^{٢} = -١$ ∴ $س = -١$

⑨ $ح_{٦} = {}^{٧}ق_{٥} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} (٢ س^{٢})^{٢}$

، $ح_{٤} = {}^{٧}ق_{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} (٢ س^{٢})^{٤}$

∴ ${}^{٧}ق_{٥} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} (٢ س^{٢})^{٢} = {}^{٧}ق_{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} (٢ س^{٢})^{٤}$

∴ $(٢ س^{٢})^{٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$

∴ $٢ س^{٢} = \frac{١}{٢}$ ∴ $س^{٢} = \frac{١}{٤}$

∴ $س = \pm \frac{١}{٢}$

⑩ الحدان الأوسطان فى مفكوك $(أ س + ب)^{١٠٧٢}$

هما $ح_{١٠٧٢}$ ، $ح_{١٠٧٣}$

، $ح_{١٠٧٢} = {}^{١٠٧٢}ق_{١٠٧١} (ب)^{١٠٧١} (أ س)^{١٠٧١}$

، $ح_{١٠٧٣} = {}^{١٠٧٢}ق_{١٠٧٢} (ب)^{١٠٧٢} (أ س)^{١٠٧٢}$

∴ ${}^{١٠٧٢}ق_{١٠٧١} (ب)^{١٠٧١} (أ س)^{١٠٧١}$

$= {}^{١٠٧٢}ق_{١٠٧٢} (ب)^{١٠٧٢} (أ س)^{١٠٧٢}$

∴ $أ س = ب$ ∴ $س = \frac{ب}{أ}$

(١١) الحد الأوسط فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$
هو الحد السادس ، $ح_٦ = {}^{ن}ق_٥ س^٥$
، $ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ س^٥$
$\therefore {}^{١٠}ق_٥ س^٥ = ٢ \times {}^{١٠}ق_٤ س^٤$
$\therefore ٢٥٢ س^٥ = ٤٢٠ س^٤$
$\therefore س = \frac{٢}{٥}$

(١٢) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن (-١)^ن س^ن = س^٢$
، الحد الأوسط هو الحد الرابع
، $ح_٤ = {}^{٦}ق_٣ (-١)^٣ س^٣ = -٢٠ س^٣$
، $ح_٣ = {}^{٦}ق_٢ (-١)^٢ س^٢ = ١$
$\therefore س^٢ - ٢٠ س^٣ + ١ = ١٩$
$\therefore س^٢ - ٢٠ س^٣ - ١٨٩ = ٠$
$\therefore (س^٣ - ٢٧)(س^٣ + ٧) = ٠$
$\therefore س = ٣$ ، $س = -\sqrt[٣]{٧}$

(١٣) $ح_٩ = {}^{١٢}ق_٨ (٥ س)^٤ (٢)^{١٠}$
، $ح_٨ = {}^{١٢}ق_٧ (٥ س)^٥ (٢)^{٧}$
$\therefore \frac{{}^{١٢}ق_٨ (٥ س)^٤ (٢)^{١٠}}{{}^{١٢}ق_٧ (٥ س)^٥ (٢)^{٧}} = \frac{١}{٢}$
$\therefore \frac{(٢)^٣}{١٦ (٥ س)^٢} = \frac{١}{٢}$ ، $\therefore (٥ س)^٢ = \frac{٢٧}{٨}$
$\therefore ٥ س = \frac{٣}{٢}$ ، $\therefore س = \frac{٣}{١٠}$

٨

(١) الحد الأوسط فى مفكوك $(٢ س^٢ + \frac{١}{٣ س})^٨$ هو $ح_٥$
، $ح_٥ = {}^{٨}ق_٤ (\frac{١}{٣ س})^٤ (٣ س^٢)^٤ = ٧٠ س^٤$
$\therefore ٧٠ س^٤ = ١١٢٠$ ، $\therefore س^٤ = ١٦$
$\therefore س = \pm ٢$

إذا كان س = ٢ ، $(٢ + س)^٥ = (٢ + ٢)^٥$
$= ١٠٢٤$
إذا كان س = -٢ ، $(٢ + س)^٥ = (٢ + (-٢))^٥$
= صفر

(٢) الحدان الأوسطان فى مفكوك $(٣ س + ٢ ص)^{١٣}$
هما $ح_٧$ ، $ح_٨$
، $ح_٧ = {}^{١٣}ق_٦ (٢ ص)^٦ (٣ س)^٧$
، $ح_٨ = {}^{١٣}ق_٧ (٢ ص)^٧ (٣ س)^٦$
$\therefore {}^{١٣}ق_٦ (٢ ص)^٦ (٣ س)^٧ = {}^{١٣}ق_٧ (٢ ص)^٧ (٣ س)^٦$
$\therefore ٣ س = ٢ ص$ ، $\therefore \frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

(٣) الحد الأوسط فى مفكوك $(\frac{٣}{٢ س} + \frac{٢ س}{٣})^{١٠}$
هو الحد السادس
، $ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ (\frac{٣}{٢ س})^٥ (\frac{٢ س}{٣})^٥ = {}^{١٠}ق_٥ (\frac{٢ س}{٣})^٥$
، عندما س = $\sqrt{٣}$
$\therefore ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ (\frac{٢\sqrt{٣}}{٣})^٥ = \frac{٢٢٠}{٣}$
$\therefore \frac{ح_٦}{ح_٥} = \frac{\frac{٢٥٢}{(٣٢٠)}}{\frac{١٨٩}{٨٠}}$

(٤) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن (م س)^{ن-ن} (\frac{١}{س})^ن$
لإيجاد معامل س نضع ن = ١
معامل $ح_٢ = {}^{ن}ق_١ م = ن م = ١٢$ (١)
لإيجاد معامل $س^٢$ نضع ن = ٢
معامل $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ م^٢ = \frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢} م^٢ = ٦٣$ (٢)
من المعادلة (١) : $م = \frac{١٢}{ن}$
، بالتعويض فى (٢) :
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢} \times (\frac{١٢}{ن})^٢ = ٦٣$
$\therefore \frac{٧٢(ن-١)}{ن} = ٦٣$ ، $\therefore ٧٢ن - ٧٢ = ٦٣ن$
$\therefore ٩ن = ٧٢$ ، $\therefore ن = ٨$
، من (١) : $\therefore م = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore ح_{ن+١} = {}^{٨}ق_ن (٢ س^٢)^{٨-ن} (\frac{١}{٣ س})^ن = {}^{٨}ق_ن \times ٢^{٨-ن} \times (\frac{١}{٣})^ن \times س^{١٦-٣ن}$
$\therefore$ معامل $س^{١٠} = {}^{٨}ق_٣ \times ٢^٥ \times (\frac{١}{٣})^٣ = \frac{٥٦ \times ٣٢}{٢٧} = \frac{١٧٩٢}{٢٧}$

(٥) معامل $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن$ ومعامل $ح_ن = {}^{ن}ق_{ن-١}$
$\therefore {}^{ن}ق_ن = {}^{ن}ق_{ن-١}$ ، $\therefore ن = ٩ + ٥ = ١٤$

(٦) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن ٢^ن س^ن$
، معامل $ح_٥ = {}^{ن}ق_٤ (٢)^٤$ ، $\therefore {}^{ن}ق_٤ = ١١٢٠ \div ٢^٤ = ٧٠$
$\therefore ن = ٨$
إذا كان ٢ = ٤ وبالتعويض فى (١) فإن س = $\frac{١}{٤}$
إذا كان ٢ = -٤ وبالتعويض فى (١) فإن س = $-\frac{١}{٤}$

(٧) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن س^{ن-ن} = ٢٨ س^٢$
$\therefore {}^{ن}ق_ن = {}^{ن}ق_{ن-٢}$ ، $\therefore {}^{ن}ق_{ن-٢} = ٢٨$
، $ح_٢ = {}^{ن}ق_١ س = ١١٢٠$
$\therefore س^١ = ١٦$ ، $\therefore س = \pm ٢$

(٨) معامل $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن (حـ)^{ن-ن} = ١٨٠$
$\therefore حـ^٢ = ٤$ ، $\therefore حـ = \pm ٢$
، $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ (حـ س)^{ن-٢} = ٢١٠$
$\therefore (\pm ٢ س)^{ن-٢} = ١$ ، $\therefore س = \pm \frac{١}{٢}$

(٩) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن س^{ن-ن}$ ، $ح_١ = {}^{ن}ق_ن س^ن$
، $ح_٨ = {}^{ن}ق_٧ س^٧$
$\because ٥ ح_١ \times ح_٨ = ١٨ ح_١ \times ح_٨$
$\therefore ٥ \times \frac{ح_٨}{ح_١} = ١٨ \times \frac{ح_١}{ح_١}$
$\therefore ٥ \times \frac{{}^{ن}ق_٧ س^٧}{{}^{ن}ق_ن س^ن} = ١٨ \times \frac{{}^{ن}ق_ن س^ن}{{}^{ن}ق_ن س^ن}$
$\therefore ٥ \times \frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤} \times \frac{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)} = ١٨ \times \frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)(ن-٦)}{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)(ن-٦)(ن-٧)}$
$\therefore ٥ \times \frac{(ن-٤)(ن-٥)(ن-٦)(ن-٧)}{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤} = ١٨ \times \frac{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}$
$\therefore ٥ \times \frac{ن^٤ - ٢٢ن^٣ + ١٧٣ن^٢ - ٦٧٤ن + ٩٦٠}{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤} = ١٨ \times \frac{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}$
$\therefore ن^٤ - ٢٢ن^٣ + ١٧٣ن^٢ - ٦٧٤ن + ٩٦٠ = ٧٢٠$
$\therefore ن^٤ - ٢٢ن^٣ + ١٧٣ن^٢ - ٦٧٤ن + ٢٤٠ = ٠$
$\therefore (ن - ١٠)(ن^٣ - ١٢ن^٢ + ٥٣ن - ٢٤) = ٠$
$\therefore ن = ١٠$ أو $ن^٣ - ١٢ن^٢ + ٥٣ن - ٢٤ = ٠$ مرفوض

(١٠) معامل $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن ٢^ن س^ن = \frac{٢٢}{٨}$
$\therefore ٨ \times {}^{ن}ق_ن ٢^ن س^ن = ٦٣$
$\therefore ١٦ \times {}^{ن}ق_ن ٢^ن س^ن = ٦٣$
$\therefore ٢^ن س^ن = \frac{١}{٢٤} = (\frac{١}{٢})^٤$
$\therefore ٢ س = \frac{١}{٢}$ ، $\therefore ٢ س = ١$

(١١) الحدان الأوسطان فى مفكوك $(س - \frac{١}{س})^{١٠}$
هما $ح_٥$ ، $ح_٦$
$\therefore ح_٥ = {}^{١٠}ق_٤ (-\frac{١}{س})^٤ (س)^٦$ (١)
، $ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ (-\frac{١}{س})^٥ (س)^٥$
$\therefore ح_٦ = -{}^{١٠}ق_٥ (\frac{١}{س})^٥ (س)^٥$ (٢)
من (١) ، (٢) : $\because {}^{١٠}ق_٤ = {}^{١٠}ق_٥$
$\therefore ٢ - س^٢ = صفر$

(١٢) معاملات $ح_١$ ، $ح_٣$ ، $ح_٥$
هى ${}^{ن}ق_٠ ٢^{ن-٢}$ ، ${}^{ن}ق_٢ ٢^{ن-٤}$ ، ${}^{ن}ق_٤ ٢^{ن-٦}$
على الترتيب :
$\therefore ٢ {}^{ن}ق_٢ ٢^{ن-٤} = {}^{ن}ق_٠ ٢^{ن-٢} + {}^{ن}ق_٤ ٢^{ن-٦}$
بالضرب × $٢^{ن-٦}$
$\therefore ٤ {}^{ن}ق_٢ = {}^{ن}ق_٠ + {}^{ن}ق_٤$ (بالقسمة على ${}^{ن}ق_٠$)
$\therefore ٤ = \frac{{}^{ن}ق_٢}{{}^{ن}ق_٠} + \frac{{}^{ن}ق_٤}{{}^{ن}ق_٠}$
$\therefore ٤ = \frac{ن(ن-١)}{٢} + \frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$
$\therefore ٤ = \frac{ن}{٢} + \frac{ن(ن-١)}{٢} + \frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٢٤}$
$\therefore ٩٦ = ١٢ن + ٢ن(ن-١) + ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)$
$\therefore ٩٦ = ١٢ن + ٢ن^٢ - ٢ن + ن^٤ - ٦ن^٣ + ١١ن^٢ - ٦ن$
$\therefore ن^٤ - ٦ن^٣ + ١٣ن^٢ + ٤ن - ٩٦ = ٠$
$\therefore (ن - ٤)(ن^٣ - ٢ن^٢ + ٥ن + ٢٤) = ٠$
$\therefore ن = ٤$ أو $ن^٣ - ٢ن^٢ + ٥ن + ٢٤ = ٠$ مرفوض

(١٣) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن (م س)^ن = ١$
، $ح_٢ = {}^{ن}ق_١ (م س) = ن م س = \frac{١٠ س}{٣}$ (١)
$\therefore م = \frac{١٠}{٣ن}$
، $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ (م س)^٢ = {}^{ن}ق_٢ م^٢ س^٢ = ٥ س^٢$
$\therefore {}^{ن}ق_٢ م^٢ = ٥$ ، $\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} م^٢ = ٥$ (٢)
بالتعويض من (١) فى (٢) :
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} \times (\frac{١٠}{٣ن})^٢ = ٥$
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} \times \frac{١٠٠}{٩ن^٢} = ٥$
$\therefore ١٠ن - ١٠ = ٩ن$ ، $\therefore ن = ١٠$
، من (١) : $\therefore م = \frac{١٠}{٣ن} = \frac{١٠}{(١٠)٣} = \frac{١}{٣}$
، الحد الأوسط هو $ح_٦$
$\therefore ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ (م س)^٥$
وعندما س = ٣
$\therefore ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ (-١)^٥ = -٢٥٢$

(١٤) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن (-٢ س)^ن = -٢ن س$ ، $\frac{١٠}{٣} = -٢ن س$
$\therefore س = \frac{٥}{-٣ن}$
، $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ (-٢ س)^٢ = \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} \times ٤ س^٢ = \frac{١٠}{٩}$
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} \times ٤ \times (\frac{٥}{-٣ن})^٢ = \frac{١٠}{٩}$
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢} \times \frac{٢٥ \times ٤}{٩ن^٢} = \frac{١٠}{٩}$

إذا كان س = ٢ ، $(٢ + س)^٥ = (٢ + ٢)^٥$
$= ١٠٢٤$
إذا كان س = -٢ ، $(٢ + س)^٥ = (٢ + (-٢))^٥$
= صفر

(٢) الحدان الأوسطان فى مفكوك $(٣ س + ٢ ص)^{١٣}$
هما $ح_٧$ ، $ح_٨$
، $ح_٧ = {}^{١٣}ق_٦ (٢ ص)^٦ (٣ س)^٧$
، $ح_٨ = {}^{١٣}ق_٧ (٢ ص)^٧ (٣ س)^٦$
$\therefore {}^{١٣}ق_٦ (٢ ص)^٦ (٣ س)^٧ = {}^{١٣}ق_٧ (٢ ص)^٧ (٣ س)^٦$
$\therefore ٣ س = ٢ ص$ ، $\therefore \frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

(٣) الحد الأوسط فى مفكوك $(\frac{٣}{٢ س} + \frac{٢ س}{٣})^{١٠}$
هو الحد السادس
، $ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ (\frac{٣}{٢ س})^٥ (\frac{٢ س}{٣})^٥ = {}^{١٠}ق_٥ (\frac{٢ س}{٣})^٥$
، عندما س = $\sqrt{٣}$
$\therefore ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ (\frac{٢\sqrt{٣}}{٣})^٥ = \frac{٢٢٠}{٣}$
$\therefore \frac{ح_٦}{ح_٥} = \frac{\frac{٢٥٢}{(٣٢٠)}}{\frac{١٨٩}{٨٠}}$

(٤) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن (م س)^{ن-ن} (\frac{١}{س})^ن$
لإيجاد معامل س نضع ن = ١
معامل $ح_٢ = {}^{ن}ق_١ م = ن م = ١٢$ (١)
لإيجاد معامل $س^٢$ نضع ن = ٢
معامل $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ م^٢ = \frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢} م^٢ = ٦٣$ (٢)
من المعادلة (١) : $م = \frac{١٢}{ن}$
، بالتعويض فى (٢) :
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢} \times (\frac{١٢}{ن})^٢ = ٦٣$
$\therefore \frac{٧٢(ن-١)}{ن} = ٦٣$ ، $\therefore ٧٢ن - ٧٢ = ٦٣ن$
$\therefore ٩ن = ٧٢$ ، $\therefore ن = ٨$
، من (١) : $\therefore م = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore ح_{ن+١} = {}^{٨}ق_ن (٢ س^٢)^{٨-ن} (\frac{١}{٣ س})^ن = {}^{٨}ق_ن \times ٢^{٨-ن} \times (\frac{١}{٣})^ن \times س^{١٦-٣ن}$
$\therefore$ معامل $س^{١٠} = {}^{٨}ق_٣ \times ٢^٥ \times (\frac{١}{٣})^٣ = \frac{٥٦ \times ٣٢}{٢٧} = \frac{١٧٩٢}{٢٧}$

(٥) معامل $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن$ ومعامل $ح_ن = {}^{ن}ق_{ن-١}$
$\therefore {}^{ن}ق_ن = {}^{ن}ق_{ن-١}$ ، $\therefore ن = ٩ + ٥ = ١٤$

(٦) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن ٢^ن س^ن$
، معامل $ح_٥ = {}^{ن}ق_٤ (٢)^٤$ ، $\therefore {}^{ن}ق_٤ = ١١٢٠ \div ٢^٤ = ٧٠$
$\therefore ن = ٨$
إذا كان ٢ = ٤ وبالتعويض فى (١) فإن س = $\frac{١}{٤}$
إذا كان ٢ = -٤ وبالتعويض فى (١) فإن س = $-\frac{١}{٤}$

(٧) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن س^{ن-ن} = ٢٨ س^٢$
$\therefore {}^{ن}ق_ن = {}^{ن}ق_{ن-٢}$ ، $\therefore {}^{ن}ق_{ن-٢} = ٢٨$
، $ح_٢ = {}^{ن}ق_١ س = ١١٢٠$
$\therefore س^١ = ١٦$ ، $\therefore س = \pm ٢$

(٨) معامل $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن (حـ)^{ن-ن} = ١٨٠$
$\therefore حـ^٢ = ٤$ ، $\therefore حـ = \pm ٢$
، $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ (حـ س)^{ن-٢} = ٢١٠$
$\therefore (\pm ٢ س)^{ن-٢} = ١$ ، $\therefore س = \pm \frac{١}{٢}$

(٩) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن س^{ن-ن}$ ، $ح_١ = {}^{ن}ق_ن س^ن$
، $ح_٨ = {}^{ن}ق_٧ س^٧$
$\because ٥ ح_١ \times ح_٨ = ١٨ ح_١ \times ح_٨$
$\therefore ٥ \times \frac{ح_٨}{ح_١} = ١٨ \times \frac{ح_١}{ح_١}$
$\therefore ٥ \times \frac{{}^{ن}ق_٧ س^٧}{{}^{ن}ق_ن س^ن} = ١٨ \times \frac{{}^{ن}ق_ن س^ن}{{}^{ن}ق_ن س^ن}$
$\therefore ٥ \times \frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤} \times \frac{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)} = ١٨ \times \frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)(ن-٦)}{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)(ن-٦)(ن-٧)}$
$\therefore ٥ \times \frac{(ن-٤)(ن-٥)(ن-٦)(ن-٧)}{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤} = ١٨ \times \frac{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}$
$\therefore ٥ \times \frac{ن^٤ - ٢٢ن^٣ + ١٧٣ن^٢ - ٦٧٤ن + ٩٦٠}{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤} = ١٨ \times \frac{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}$
$\therefore ن^٤ - ٢٢ن^٣ + ١٧٣ن^٢ - ٦٧٤ن + ٩٦٠ = ٧٢٠$
$\therefore ن^٤ - ٢٢ن^٣ + ١٧٣ن^٢ - ٦٧٤ن + ٢٤٠ = ٠$
$\therefore (ن - ١٠)(ن^٣ - ١٢ن^٢ + ٥٣ن - ٢٤) = ٠$
$\therefore ن = ١٠$ أو $ن^٣ - ١٢ن^٢ + ٥٣ن - ٢٤ = ٠$ مرفوض

(١٠) معامل $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن ٢^ن س^ن = \frac{٢٢}{٨}$
$\therefore ٨ \times {}^{ن}ق_ن ٢^ن س^ن = ٦٣$
$\therefore ١٦ \times {}^{ن}ق_ن ٢^ن س^ن = ٦٣$
$\therefore ٢^ن س^ن = \frac{١}{٢٤} = (\frac{١}{٢})^٤$
$\therefore ٢ س = \frac{١}{٢}$ ، $\therefore ٢ س = ١$

(١١) الحدان الأوسطان فى مفكوك $(س - \frac{١}{س})^{١٠}$
هما $ح_٥$ ، $ح_٦$
$\therefore ح_٥ = {}^{١٠}ق_٤ (-\frac{١}{س})^٤ (س)^٦$ (١)
، $ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ (-\frac{١}{س})^٥ (س)^٥$
$\therefore ح_٦ = -{}^{١٠}ق_٥ (\frac{١}{س})^٥ (س)^٥$ (٢)
من (١) ، (٢) : $\because {}^{١٠}ق_٤ = {}^{١٠}ق_٥$
$\therefore ٢ - س^٢ = صفر$

(١٢) معاملات $ح_١$ ، $ح_٣$ ، $ح_٥$
هى ${}^{ن}ق_٠ ٢^{ن-٢}$ ، ${}^{ن}ق_٢ ٢^{ن-٤}$ ، ${}^{ن}ق_٤ ٢^{ن-٦}$
على الترتيب :
$\therefore ٢ {}^{ن}ق_٢ ٢^{ن-٤} = {}^{ن}ق_٠ ٢^{ن-٢} + {}^{ن}ق_٤ ٢^{ن-٦}$
بالضرب × $٢^{ن-٦}$
$\therefore ٤ {}^{ن}ق_٢ = {}^{ن}ق_٠ + {}^{ن}ق_٤$ (بالقسمة على ${}^{ن}ق_٠$)
$\therefore ٤ = \frac{{}^{ن}ق_٢}{{}^{ن}ق_٠} + \frac{{}^{ن}ق_٤}{{}^{ن}ق_٠}$
$\therefore ٤ = \frac{ن(ن-١)}{٢} + \frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$
$\therefore ٤ = \frac{ن}{٢} + \frac{ن(ن-١)}{٢} + \frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٢٤}$
$\therefore ٩٦ = ١٢ن + ٢ن(ن-١) + ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)$
$\therefore ٩٦ = ١٢ن + ٢ن^٢ - ٢ن + ن^٤ - ٦ن^٣ + ١١ن^٢ - ٦ن$
$\therefore ن^٤ - ٦ن^٣ + ١٣ن^٢ + ٤ن - ٩٦ = ٠$
$\therefore (ن - ٤)(ن^٣ - ٢ن^٢ + ٥ن + ٢٤) = ٠$
$\therefore ن = ٤$ أو $ن^٣ - ٢ن^٢ + ٥ن + ٢٤ = ٠$ مرفوض

(١٣) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن (م س)^ن = ١$
، $ح_٢ = {}^{ن}ق_١ (م س) = ن م س = \frac{١٠ س}{٣}$ (١)
$\therefore م = \frac{١٠}{٣ن}$
، $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ (م س)^٢ = {}^{ن}ق_٢ م^٢ س^٢ = ٥ س^٢$
$\therefore {}^{ن}ق_٢ م^٢ = ٥$ ، $\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} م^٢ = ٥$ (٢)
بالتعويض من (١) فى (٢) :
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} \times (\frac{١٠}{٣ن})^٢ = ٥$
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} \times \frac{١٠٠}{٩ن^٢} = ٥$
$\therefore ١٠ن - ١٠ = ٩ن$ ، $\therefore ن = ١٠$
، من (١) : $\therefore م = \frac{١٠}{٣ن} = \frac{١٠}{(١٠)٣} = \frac{١}{٣}$
، الحد الأوسط هو $ح_٦$
$\therefore ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ (م س)^٥$
وعندما س = ٣
$\therefore ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ (-١)^٥ = -٢٥٢$

(١٤) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن (-٢ س)^ن = -٢ن س$ ، $\frac{١٠}{٣} = -٢ن س$
$\therefore س = \frac{٥}{-٣ن}$
، $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ (-٢ س)^٢ = \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} \times ٤ س^٢ = \frac{١٠}{٩}$
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} \times ٤ \times (\frac{٥}{-٣ن})^٢ = \frac{١٠}{٩}$
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢} \times \frac{٢٥ \times ٤}{٩ن^٢} = \frac{١٠}{٩}$

(١٥) $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن (م س)^ن = ن م^ن س^ن = ن م س$
، $ح_٢ = {}^{ن}ق_١ (م س) = ن م س$ ، $ح_٣ = {}^{ن}ق_٢ (م س)^٢$
معامل $س = ن م = ٢٤$ ، $\therefore م = \frac{٢٤}{ن}$
، معامل $س^٢ = {}^{ن}ق_٢ م^٢ = ٢٥٢$
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} م^٢ = ٢٥٢$
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} (\frac{٢٤}{ن})^٢ = ٢٥٢$
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} \times \frac{٥٧٦}{ن^٢} = ٢٥٢$
$\therefore ٢٨٨(ن-١) = ٢٥٢ن$
$\therefore ٢٨٨ن - ٢٨٨ = ٢٥٢ن$
$\therefore ٣٦ن = ٢٨٨$
ومنها ن = ٨ ، $\therefore م = \frac{٢٤}{٨} = ٣$
، معامل $س^٣ = {}^{ن}ق_٣ م^٣ = {}^{٨}ق_٣ (٣)^٣ = ١٥١٢$

(١٦) معامل $ح_{ن+١} = {}^{ن}ق_ن$ ومعامل $ح_{ن-١} = {}^{ن}ق_{ن-١}$
$\therefore {}^{ن}ق_ن = ٢ \times {}^{ن-١}ق_{ن-١}$
$\therefore \frac{ن!}{ن!} = ٢ \times \frac{(ن-١)!}{(ن-٢)!(ن-١)!}$
$\therefore \frac{ن}{ن!} = \frac{٢}{(ن-٢)!}$
$\therefore ن = ٩$ ، $\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢} = \frac{٣ن(ن-١)}{٢}$

(١٧) الحدان الأوسطان فى مفكوك $(٢ م + \frac{١}{س})^{١٠٠}$
هما $ح_{٥٠}$ ، $ح_{٥١}$
، $ح_{٥١} = {}^{١٠٠}ق_{٥٠} (\frac{١}{س})^{٥٠} (٢ م)^{٥٠}$
، $ح_{٥٠} = {}^{١٠٠}ق_{٤٩} (\frac{١}{س})^{٤٩} (٢ م)^{٥١}$
$= {}^{١٠٠}ق_{٥٠} (\frac{١}{س})^{٥٠} (٢ م)^{٥٠}$
، $\because {}^{١٠٠}ق_{٤٩} = {}^{١٠٠}ق_{٥٠}$
$\therefore \frac{١}{س} = ٢ م$
$\therefore ٢ م س = ١$ ، $\because ٢ م + س = \frac{٩}{٤}$
$\therefore ٢ م = \frac{٩}{٤} - س$
$\therefore ٢ (\frac{٩}{٤} - س) س = ١$
$\therefore \frac{٩}{٢} س - ٢ س^٢ = ١$
$\therefore ٤ س^٢ - ٩ س + ٢ = ٠$
$(٤ س - ١)(س - ٢) = ٠$
$\therefore س = ٢$ ومنها م = $\frac{١}{٤}$
أو $س = \frac{١}{٤}$ ومنها م = ٢

٨

(١) مفكوك $(م + س)^ن = م^ن + ن م^{ن-١} س$
$+ \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} م^{ن-٢} س^٢ + ...$
بمقارنة معاملات $س^١$: $\therefore م^ن = ٢ م$ (١)
، بمقارنة معاملات س : $ن م^{ن-١} = ٢٦$ (٢)
بقسمة (٢) على (١) :
$\therefore ن م^{-١} = ٢$ ، $\therefore \frac{ن}{م} = ٢$ ، $\therefore م = \frac{ن}{٢}$
بمقارنة معاملات $س^٢$: $\frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} م^{ن-٢} = ٢٥$ (٣)
بقسمة (٣) على (١) :
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} \times \frac{٢}{ن} = \frac{٥}{٢}$
$\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} \times (\frac{ن}{٢})^{-٢} = \frac{٥}{٢}$
$\therefore \frac{ن(ن-١) \times ٤}{٢ ن^٢} = \frac{٥}{٢}$
$\therefore ن^٢ - ن = ٥ن$ ، $\therefore ن(ن-٦) = ٠$
$\therefore ن = ٦$ ، $م = ٣ \div ٢ = ٣ \div \frac{٦}{٢} = ٣^٢$

(٢) مفكوك $(١ + م س)^{١٠} = ١ + ١٠ م س$
$+ \frac{٩ \times ١٠}{١ \times ٢} (م س)^٢ + \frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣} (م س)^٣ + ...$
بمقارنة معاملات س : $١٠ م = ١$
بمقارنة معاملات $س^٢$: $\frac{٩ \times ١٠}{١ \times ٢} م^٢ = ب$ (١)
بمقارنة معاملات $س^٣$: $\frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣} م^٣ = حـ$ (٢)
$\therefore ١٢٠ م^٣ = ١٥$
$\therefore م = \frac{١}{٢}$
، بالتعويض فى (١) : $\therefore ب = ١٠ \times \frac{١}{٢} = ٥$
، بالتعويض فى (٢) : $\therefore حـ = ٤٥ (\frac{١}{٢})^٣ = \frac{٤٥}{٨}$

(٣) مفكوك $(١ + حـ س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_١ حـ س$
$+ {}^{ن}ق_٢ (حـ س)^٢ + {}^{ن}ق_٣ (حـ س)^٣ + ...$
بمقارنة معاملات س : $ن حـ = ٢٠$ (١)
بمقارنة معاملات $س^٢$: $\frac{ن(ن-١)}{٢} حـ^٢ = ١٦$
، بمقارنة معاملات $س^٣$: ${}^{ن}ق_٣ حـ^٣ = ٢ {}^{ن}ق_٢ حـ^٣$
$\therefore ن(ن-١) حـ^٣ = ٣ ن(ن-١) حـ^٢$
$\therefore \frac{حـ^٣}{حـ^٢} = \frac{١٦}{٣}$
$\therefore (ن - ٢ + ١) حـ = \frac{١٦}{٣}$
$\therefore (ن - ٢) حـ = \frac{١٦}{٣}$ ، $\therefore (ن - ٢) حـ = ١٦$
$\therefore ن حـ - ٢ حـ = ١٦$ ، من (١)
$\therefore ٢٠ - ٢ حـ = ١٦$
$\therefore حـ = ٢$ ومنها ن = ١٠

إجابات تمارين 4

١

① $ح_{ر+١} = {}^{١٤}ق_{ر}\left(\frac{٢}{س}\right)^{ر} \times (س)^{١٤-ر}$

$= {}^{١٤}ق_{ر} \times ٢^{ر} \times س^{-ر} \times س^{١٤-ر}$

$= {}^{١٤}ق_{ر} \times ٢^{ر} \times س^{١٤-٢ر}$

بوضع $١٤ - ٢ر = ٨$ $\therefore ر = ٣$

$\therefore$ معامل $س^{٨} = {}^{١٤}ق_{٣} \times ٢^{٣} = ٣٦٤$

② $ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر}\left(\frac{٢}{س^{٣}}\right)^{ر}\left(\frac{٣}{٢}\right)^{١١-ر}$

$= {}^{١١}ق_{ر}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{ر}\left(\frac{٣}{٢}\right)^{١١-ر}$

$\times س^{-٣ر} \times س^{١١-ر}$

$= {}^{١١}ق_{ر}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{ر}\left(\frac{٣}{٢}\right)^{١١-ر} س^{١١-٢ر}$

$= {}^{١١}ق_{ر}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢ر-١١} س^{١١-٢ر}$

بوضع $١١ - ٢ر = ١$ $\therefore ر = ٥$

معامل $س = {}^{١١}ق_{٥}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٩}(٥)^{-١١} = \frac{٦٩٣}{١٢٥}$

③ $ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر}\left(\frac{١٠}{٢س^{٢}}\right)^{ر} س^{١٢-ر}$

$= {}^{١٢}ق_{ر}\left(\frac{١}{٢}\right)^{ر} \times س^{-٢ر} \times س^{١٢-ر}$

$= {}^{١٢}ق_{ر}\left(\frac{١}{٢}\right)^{ر} \times س^{١٢-٣ر}$

بوضع $١٢ - ٣ر = -٨$ $\therefore ر = ٥$

الحد المشتمل على $س^{-٨}$ هو

$ح_{٦} = {}^{١٢}ق_{٥}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} س^{-٨} = \frac{-٩٩}{٤} س^{-٨}$

$\therefore {}^{٢٥}ق_{٠} {}^{٢٥}ق_{١٠} + {}^{٢٥}ق_{١} {}^{٢٥}ق_{١١} + {}^{٢٥}ق_{٢} {}^{٢٥}ق_{١٢} + \ldots + {}^{٢٥}ق_{١٥} {}^{٢٥}ق_{٢٥} = {}^{٥٠}ق_{٢٥}$

$\therefore {}^{٢٥}ق_{١٠} {}^{٢٥}ق_{٠} + {}^{٢٥}ق_{١١} {}^{٢٥}ق_{١} + {}^{٢٥}ق_{١٢} {}^{٢٥}ق_{٢} + \ldots + {}^{٢٥}ق_{٢٥} {}^{٢٥}ق_{١٥} = {}^{٥٠}ق_{٢٥}$

وبمساواة معاملات $س^{٢٥}$ في الطرفين

$\therefore {}^{٢٥}ق_{٠} {}^{٢٥}ق_{٢٥} - {}^{٢٥}ق_{١} {}^{٢٥}ق_{٢٤} + {}^{٢٥}ق_{٢} {}^{٢٥}ق_{٢٣} - \ldots - {}^{٢٥}ق_{٢٥} {}^{٢٥}ق_{٠} = {}^{٥٠}ق_{٢٥}$

$\therefore {}^{٢٥}ق_{٠}^{٢} - {}^{٢٥}ق_{١}^{٢} + {}^{٢٥}ق_{٢}^{٢} - \ldots + {}^{٢٥}ق_{٢٥}^{٢} = {}^{٥٠}ق_{٢٥}$

وبمساواة معاملات $س^{٢٥}$ في الطرفين

$\therefore {}^{٢٥}ق_{٠}^{٢} + {}^{٢٥}ق_{١}^{٢} + {}^{٢٥}ق_{٢}^{٢} + \ldots + {}^{٢٥}ق_{٢٥}^{٢} = {}^{٥٠}ق_{٢٥}$

٢

① $ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر}\left(\frac{س}{٢}\right)^{١٢-ر}\left(\frac{-٢}{س}\right)^{ر}$

$= {}^{١٢}ق_{ر}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٢-ر}(-٢)^{ر} \times س^{ر-١٢} \times س^{-ر}$

$= {}^{١٢}ق_{ر}(-١)^{ر}(٢)^{١٢-٢ر} \times س^{-١٢}$

بوضع $١٢ - ٢ر = ٠$ $\therefore ر = ٦$

$ح_{٧} = {}^{١٢}ق_{٦}(٢)^{٦}(-١)^{٦} \times س^{-١٢} = ٧٩٢٠ س^{-١٢}$

⑤ $ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر}\left(\frac{٣س}{س^{٢}}\right)^{ر}\left(\frac{٢}{س}\right)^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر}(٣)^{ر}(٢)^{١٠-ر}$

$\left(\frac{٣س}{س}\right)^{ر}\left(\frac{٢}{س}\right)^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر}(٣)^{ر}(٢)^{١٠-ر}\left(\frac{٣}{س}\right)^{٢ر-١٠}$

بوضع $١٠ - ٢ر = ٤$ $\therefore ر = ٣$

معامل $\left(\frac{٣}{س}\right)^{٤}$ هو ${}^{١٠}ق_{٣}(٣)^{٣}(٢)^{٧} = ١٩٢٠$

⑥ $ح_{ر+١} = س^{٢} \times {}^{١٥}ق_{ر}\left(\frac{٢}{س^{٢}}\right)^{ر}(-١)^{١٥-ر}$

$= س^{٢} \times {}^{١٥}ق_{ر}(٢)^{ر}(-١)^{١٥-ر}$

$\times س^{-٢ر} \times (-١)^{١٥-ر}$

$= {}^{١٥}ق_{ر}(٢)^{ر}(-١)^{١٥-ر} \times س^{٢-٢ر}$

بوضع $٢ - ٢ر = ١٢$ $\therefore ر = ٥$

معامل $س^{١٢}$ هو ${}^{١٥}ق_{٥}(٢)^{٥}(-١)^{١٠} = \frac{٣٠٠٢}{٢٢}$

⑦ $ح_{ر+١} = س^{-٢} \times {}^{١٠}ق_{ر}\left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{ر}(-١)^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر}(-١)^{١٠-ر} \times س^{-٢ر} \times س^{-١٠+ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر}(-١)^{١٠-ر} \times س^{-٢ر-١٠+ر}$

بوضع $٧ - ٣ر = -٥$ $\therefore ر = ٤$

معامل $\frac{١}{س^{٥}}$ هو ${}^{١٠}ق_{٤} = ٢١٠$

⑧ $ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر}\left(\frac{٢}{س^{٣}}\right)^{١١-ر}(-٣س^{٢})^{ر}$

$= {}^{١١}ق_{ر}(٢)^{١١-ر}(-١)^{ر}(٣)^{ر} \times س^{-٣(١١-ر)} \times س^{٢ر}$

$= {}^{١١}ق_{ر}(-١)^{ر}(٢)^{١١-ر}(٣)^{ر} \times س^{-٣٣+٣ر+٢ر}$

$= {}^{١١}ق_{ر}(-١)^{ر}(٢)^{١١-ر}(٣)^{ر} \times س^{-٣٣+٥ر}$

بوضع $٣٣ - ٥ر = ٢$ $\therefore ر = ٧$

معامل $س^{٢}$ هو $-{}^{١١}ق_{٧}(٢)^{٤}(٣)^{٧} = -٧٣٥٢٠$

⑨ $ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر}\left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{ر}(س^{٢})^{١٥-ر}$

$= {}^{١٥}ق_{ر} س^{-٢ر} \times س^{٣٠-٢ر}$

$= {}^{١٥}ق_{ر} س^{٣٠-٤ر}$

بوضع $٣٠ - ٤ر = ٦$ $\therefore ر = ٦$

$ح_{٧} = {}^{١٥}ق_{٦} س^{٦} = ٥٠٠٥ س^{٦}$

⑩ $ح_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر}\left(\frac{١}{س^{٣}}\right)^{ر}(س)^{٦-ر}$

$= {}^{٦}ق_{ر} س^{-٣ر} \times س^{٦-ر}$

$= {}^{٦}ق_{ر} س^{٦-٤ر}$

بوضع $٦ - ٤ر = ٠$ $\therefore ر = ٢$

الحد المشتمل على $س^{٦} = {}^{٦}ق_{٢} \times ٥٠٠٥ س^{٦} = ٥٠٥٠ س^{٦}$

الحد الخالي من س هو ${}^{٦}ق_{٦}(-١)^{٦} = ٢٠$

٣

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{ر}(٢س)^{ن-ر}$

$= {}^{ن}ق_{ر} \times ٢^{ن-ر} \times س^{-٢ر} \times س^{ن-ر}$

$= {}^{ن}ق_{ر} \times ٢^{ن-ر} \times س^{ن-٣ر}$

$\therefore$ $ح_{ر}$ حد خالي من س

$\therefore ن - ١٢ = ٠$ $\therefore ن = ١٢$

٤

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\left(\frac{ل}{س}\right)^{ر} \times (٢س^{٢})^{ن-ر}$

$= {}^{ن}ق_{ر} \times ل^{ر} \times س^{-ر} \times ٢^{ن-ر} \times س^{٢ن-٢ر}$

$= {}^{ن}ق_{ر} \times ٢^{ن-ر} \times ل^{ر} \times س^{٢ن-٣ر}$

بوضع $٢٠ - ٥ر = ١٥$ $\therefore ر = ١$

معامل $س^{١٥} = {}^{٢٠}ق_{١} \times ٢^{١٩} \times ل = ٥١٢٠ ل$

بوضع $٢٠ - ٥ر = ٥$ $\therefore ر = ٣$

معامل $س^{٥} = {}^{٢٠}ق_{٣} \times ٢^{١٧} \times ل^{٣} = ١٥٣٦٠ ل^{٣}$

$\therefore ٥١٢٠ ل = ١٥٣٦٠ ل^{٣}$ $\therefore ل^{٢} = \frac{١}{٣}$

$\therefore ل = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

⑫ $(١ + س)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} س + {}^{ن}ق_{٢} س^{٢} + \ldots$

$+ {}^{ن}ق_{ن} س^{ن}$

$\therefore {}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} س + {}^{ن}ق_{٢} س^{٢} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن} س^{ن} = (١ + س)^{ن}$

$\therefore \left[{}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} س + {}^{ن}ق_{٢} س^{٢} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن} س^{ن}\right) د س = \left[(١ + س)^{ن} د س$

$\therefore {}^{ن}ق_{٠} س + \frac{١}{٢} {}^{ن}ق_{١} س^{٢} + \frac{١}{٣} {}^{ن}ق_{٢} س^{٣} + \ldots + \frac{١}{ن+١} {}^{ن}ق_{ن} س^{ن+١} + ث$

$= \frac{١}{ن+١}(١ + س)^{ن+١} + ث$

بوضع $س = ٠$ $\therefore ث = \frac{-١}{ن+١}$

$\therefore {}^{ن}ق_{٠} س + \frac{١}{٢} {}^{ن}ق_{١} س^{٢} + \frac{١}{٣} {}^{ن}ق_{٢} س^{٣} + \ldots + \frac{١}{ن+١} {}^{ن}ق_{ن} س^{ن+١}$

$= \frac{١}{ن+١}(١ + س)^{ن+١} - \frac{١}{ن+١}$

بوضع $س = ١$

$\therefore {}^{ن}ق_{٠} + \frac{١}{٢} {}^{ن}ق_{١} + \frac{١}{٣} {}^{ن}ق_{٢} + \ldots + \frac{١}{ن+١} {}^{ن}ق_{ن} = \frac{١}{ن+١}\left[٢^{ن+١} - ١\right]$

⑬ مجموع معاملات الـ ٣٠ حدًا الأخيرة = مجموع معاملات الـ ٣٠ حدًا الأولى

$\therefore$ مجموع معاملات الـ ٣٠ حدًا الأخيرة $= \frac{١}{٢}$ مجموع معاملات حدود المفكوك

$= \frac{١}{٢} \times ٢^{٥٩} = ٢^{٥٨}$

⑭ $\because$ الحد الأوسط $ح_{ر+١} = \frac{٣٢}{٨}$

$\therefore {}^{ن}ق_{ر} \times \frac{١}{س^{٥}} \times س^{٥} ما^{٥} = \frac{٣٢}{٨}$

$\therefore ما^{٥} = \frac{١}{٢^{٥}}$ $\therefore ما = \frac{١}{٢}$

$\therefore س = ن\pi + (-١)^{ن} \times \frac{\pi}{٦}$ حيث $ن \in ص$

⑮ $\because$ الحد الأوسط $ح_{ر+١} = \frac{٢ن}{ن}$

$\therefore {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن}$

$\therefore {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن}$

$\therefore {}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن} = ٢^{ن}$

$\therefore {}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن} = ٢^{ن}$

١٧

الحد الأوسط في مفكوك $(١ + س)^{٢ن}$ هو $ح_{ن+١}$

$ح_{ن+١} = {}^{٢ن}ق_{ن}(س)^{ن} = \frac{ل^{٢ن}}{ل^{ن} ل^{ن}}(س)^{ن}$

$= \frac{٢ن(٢ن-١)(٢ن-٢)(٢ن-٣)\ldots٣ \times ٢ \times ١}{ل^{ن} ل^{ن}}(س)^{ن}$

$= \frac{[٢ن(٢ن-٢)(٢ن-٤)\ldots٤ \times ٢][(٢ن-١)(٢ن-٣)\ldots٣ \times ١]}{ل^{ن} ل^{ن}}(س)^{ن}$

$= \frac{٢^{ن}[ن(ن-١)(ن-٢)\ldots٢ \times ١][(٢ن-١)(٢ن-٣)\ldots٣ \times ١]}{ل^{ن} ل^{ن}}(س)^{ن}$

$= \frac{٢^{ن}[ل^{ن}][١ \times ٣ \times ٥ \times \ldots \times (٢ن-١)]}{ل^{ن} ل^{ن}}(س)^{ن}$

$= \frac{١ \times ٣ \times ٥ \times \ldots \times (٢ن-١)}{ل^{ن}} \times (٢س)^{ن}$

١٨

$(ا + ب)^{٢ن} + (ا - ب)^{٢ن}$

$= ٢\left[{}^{٢ن}ق_{٠} ا^{٢ن} + {}^{٢ن}ق_{٢} ا^{٢ن-٢} ب^{٢} + \ldots + {}^{٢ن}ق_{٢ن} ب^{٢ن}\right]$

$= ٢\left[{}^{٢ن}ق_{٠} ا^{٢ن} + {}^{٢ن}ق_{٢} ا^{٢ن-٢}(-ب)^{٢} + \ldots + {}^{٢ن}ق_{٢ن}(-ب)^{٢ن}\right]$

$= ٢\left[{}^{٢ن}ق_{٠} ا^{٢ن} + {}^{٢ن}ق_{٢} ا^{٢ن-٢}(-ب)^{٢} + \ldots + {}^{٢ن}ق_{٢ن}(-ب)^{٢ن}\right]$

$= ٢\left[{}^{٢ن}ق_{٠} ا^{٢ن} + {}^{٢ن}ق_{٢} ا^{٢ن-٢} ب^{٢} + \ldots + {}^{٢ن}ق_{٢ن} ب^{٢ن}\right]$

$= ٢\left[{}^{٢ن}ق_{٠} ا^{٢ن} + {}^{٢ن}ق_{٢} ا^{٢ن-٢} ب^{٢} + \ldots + {}^{٢ن}ق_{٢ن} ب^{٢ن}\right)$

، الحد الأوسط في المفكوك $ح_{ن+١}$

$= ٢\left[{}^{٢ن}ق_{ن} ا^{ن} ب^{ن}\right]$

، بوضع $ا = ٥$ ، $ب = ٢$

$= ٢\left[{}^{٢ن}ق_{ن} ٥^{ن} ٢^{ن}\right]$

$= ٢\left[{}^{٢ن}ق_{ن} ١٠^{ن}\right]$

$\therefore {}^{٢ن}ق_{٠} ١٠^{٠} + {}^{٢ن}ق_{٢} ١٠^{٢} + {}^{٢ن}ق_{٤} ١٠^{٤} + \ldots + {}^{٢ن}ق_{٢ن} ١٠^{٢ن} = \frac{(٢ن)!}{ن! ن!}$

$= ({}^{٢ن}ق_{٠})^{٢} + ({}^{٢ن}ق_{١})^{٢} + ({}^{٢ن}ق_{٢})^{٢} + \ldots + ({}^{٢ن}ق_{ن})^{٢}$

$\therefore (٥ + ٢٠٧)^{ن} + (٥ - ٢٠٧)^{ن}$ يقبل القسمة على ٥

$= ٢\left[{}^{ن}ق_{٠} ٥^{ن} + {}^{ن}ق_{٢} ٥^{ن-٢} ٢٠٧^{٢} + {}^{ن}ق_{٤} ٥^{ن-٤} ٢٠٧^{٤} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن} ٢٠٧^{ن}\right]$

$= ٥ \times ٢\left[{}^{ن}ق_{٠} ٥^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢} ٥^{ن-٣} ٢٠٧^{٢} + {}^{ن}ق_{٤} ٥^{ن-٥} ٢٠٧^{٤} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن} ٢٠٧^{ن}\right]$

$= ١٠ \times$ عدد صحيح

١٩

$\because (١ + س)^{٢ن} = (١ + س)^{ن}(١ + س)^{ن}$

$\therefore {}^{٢ن}ق_{ن} + {}^{٢ن}ق_{ن+١} س + \ldots + {}^{٢ن}ق_{٢ن} س^{ن} = ({}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} س + {}^{ن}ق_{٢} س^{٢} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن} س^{ن})$

$({}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} س + {}^{ن}ق_{٢} س^{٢} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن} س^{ن})$

وبمساواة معاملات $س^{ن}$ في الطرفين

$\therefore {}^{٢ن}ق_{ن} = ({}^{ن}ق_{٠})^{٢} + ({}^{ن}ق_{١})^{٢} + ({}^{ن}ق_{٢})^{٢} + \ldots + ({}^{ن}ق_{ن})^{٢}$

$\therefore \frac{(٢ن)!}{ن! ن!} = ({}^{ن}ق_{٠})^{٢} + ({}^{ن}ق_{١})^{٢} + ({}^{ن}ق_{٢})^{٢} + \ldots + ({}^{ن}ق_{ن})^{٢}$

٢٠

بفرض أن

$(١ - س + س^{٢} - س^{٣} + \ldots + س^{٢ن})$

$(١ + س + س^{٢} + س^{٣} + \ldots + س^{٢ن})$

⑧ $[(١ - س)^{١١} + (١ + س)^{١١}]$

$= \frac{١١!}{١! ١٠!} + \frac{١١!}{٣! ٨!}(٣ + س)^{٢} + \ldots + (١ + س)^{١١}]$

$= [٢ + ٢س]^{١١}$

$ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر}(٢س)^{ر} \times (٢)^{١١-ر}$

$= {}^{١١}ق_{ر}(٢)^{ر} \times (٢)^{١١-ر} \times س^{ر}$

بوضع $ر = ٩$

معامل $س^{٩}$ هو ${}^{١١}ق_{٩}(٢)^{٩}(٢)^{٢} = ٢٥٣٤٤٠$

⑨ $ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر}\left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{ر}(س^{٢})^{١٥-ر}$

$= {}^{١٥}ق_{ر} س^{-٢ر} \times س^{٣٠-٢ر}$

$= {}^{١٥}ق_{ر} س^{٣٠-٤ر}$

بوضع $٣٠ - ٤ر = ٦$ $\therefore ر = ٦$

$ح_{٧} = {}^{١٥}ق_{٦} س^{٦} = ٥٠٠٥ س^{٦}$

⑩ $ح_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر}\left(\frac{١}{س^{٣}}\right)^{ر}(س)^{٦-ر}$

$= {}^{٦}ق_{ر} س^{-٣ر} \times س^{٦-ر}$

$= {}^{٦}ق_{ر} س^{٦-٤ر}$

بوضع $٦ - ٤ر = ٠$ $\therefore ر = ٢$

$ح_{٣} = {}^{٦}ق_{٢} س^{٢} = ١٥ س^{٢}$

الحد المشتمل على

$س^{٦} = ٥٠٠٥ س^{٦} + ١٥ س^{٦} = ٥٠٥٠ س^{٦}$

الحد الخالي من س هو $ح_{٦} = {}^{٦}ق_{٦}(-١)^{٦} = ٢٠$

٢١

① $\because (١ + س)^{٢٥}(١ + س)^{٢٥} = (١ + س)^{٥٠}$

$\therefore ({}^{٢٥}ق_{٠} + {}^{٢٥}ق_{١} س + {}^{٢٥}ق_{٢} س^{٢} + \ldots)$

$({}^{٢٥}ق_{٠} + {}^{٢٥}ق_{١} س + {}^{٢٥}ق_{٢} س^{٢} + \ldots + {}^{٢٥}ق_{٢٥} س^{٢٥})$

$= {}^{٥٠}ق_{٠} + {}^{٥٠}ق_{١} س + {}^{٥٠}ق_{٢} س^{٢} + \ldots + {}^{٥٠}ق_{١٥} س^{١٥} + \ldots + {}^{٥٠}ق_{٥٠} س^{٥٠}$

وبمساواة معاملات $س^{١٥}$ في الطرفين

$\therefore {}^{٢٥}ق_{٠} {}^{٢٥}ق_{١٥} + {}^{٢٥}ق_{١} {}^{٢٥}ق_{١٤} + {}^{٢٥}ق_{٢} {}^{٢٥}ق_{١٣} + \ldots + {}^{٢٥}ق_{١٥} {}^{٢٥}ق_{٠} = {}^{٥٠}ق_{١٥}$

② $\because (١ + س)^{٢٥}(١ - س)^{٢٥} = (١ - س^{٢})^{٢٥}$

$\therefore ({}^{٢٥}ق_{٠} + {}^{٢٥}ق_{١} س + {}^{٢٥}ق_{٢} س^{٢} + \ldots$

$({}^{٢٥}ق_{٠} - {}^{٢٥}ق_{١} س + {}^{٢٥}ق_{٢} س^{٢} - \ldots - {}^{٢٥}ق_{٢٥} س^{٢٥})$

$= {}^{٢٥}ق_{٠} - {}^{٢٥}ق_{١} س^{٢} + {}^{٢٥}ق_{٢} س^{٤} - \ldots$

$- {}^{٢٥}ق_{٢٥} س^{٥٠}$

وبمساواة معاملات $س^{٢٥}$ في الطرفين.

$\therefore {}^{٢٥}ق_{٠} {}^{٢٥}ق_{٢٥} - {}^{٢٥}ق_{١} {}^{٢٥}ق_{٢٤} + {}^{٢٥}ق_{٢} {}^{٢٥}ق_{٢٣} - \ldots$

$- \ldots + {}^{٢٥}ق_{٢٥} {}^{٢٥}ق_{٠} = {}^{٥٠}ق_{٢٥}$

٥

الحد الأوسط هو مكعك $(\frac{2}{3}س^{-2} + \frac{3}{2}س^{2})^{12}$ هو $ح_7$

① $ح_{ن+1} = {}^{12}ق_ن (\frac{2}{3}س^{-2})^{12-ن} (\frac{3}{2}س^{2})^{ن}$

② $ح_7 = {}^{12}ق_6 (\frac{2}{3}س^{-2})^{6} (\frac{3}{2}س^{2})^{6}$

$= {}^{12}ق_6 (\frac{2}{3})^{6} (س)^{-12}$

$(\frac{2}{3})^{6} (س)^{12}$

$= {}^{12}ق_6 (\frac{2}{3})^{6} (\frac{3}{2})^{6} (س)^{12-12}$

$= {}^{12}ق_6 (\frac{2}{3})^{6} (\frac{3}{2})^{6} (س)^{0}$

∴ بوضع ١٢ − ٢ن = ٠ ∴ ن = ٦

∴ الحد المشتمل على

س^{0} هو $ح_7 = {}^{12}ق_6 (\frac{2}{3})^{6} (\frac{3}{2})^{6} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 924$

٦

$ح_{ن+1} = {}^{9}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{9-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{9}ق_ن (\frac{1}{2})^{ن} (س)^{-2(9-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{9}ق_ن (\frac{1}{2})^{ن} (س)^{-18+2ن} (س)^{3ن}$

$= {}^{9}ق_ن (\frac{1}{2})^{ن} (س)^{-18+5ن}$

∴ بوضع ١٨ − ٥ن = ٠ ∴ ن = ٦

∴ قيمة الحد الخالي من س هو $ح_7 = {}^{9}ق_6 (\frac{1}{2})^{6} (1)^{3} = 84$

∴ الحدين الأوسطين هما $ح_5$ ، $ح_6$

$ح_5 = {}^{9}ق_4 (\frac{1}{2})^{4} (س)^{-18+20} = 126 س^{2}$

$= 918.5 س^{2}$

$ح_6 = {}^{9}ق_5 (\frac{1}{2})^{5} (س)^{-18+25} = 252 س^{7}$

$= 2016 س^{7}$

∴ $س^{7} = \frac{1}{64}$ ∴ $س = \frac{1}{2}$

٧

$ح_{ن+1} = {}^{12}ق_ن (\frac{2}{س^{3}})^{12-ن} (س^{2})^{ن}$

$= {}^{12}ق_ن (2)^{12-ن} (س)^{-3(12-ن)} (س)^{2ن}$

$= {}^{12}ق_ن (2)^{12-ن} (س)^{-36+3ن} (س)^{2ن}$

$= {}^{12}ق_ن (2)^{12-ن} (س)^{-36+5ن}$

∴ بوضع ٣٦ − ٥ن = ٠ ∴ ن = ٧

∴ لا يوجد حد يشتمل على س^{0}

٨

$ح_{ن+1} = {}^{10}ق_ن (\frac{س^{2}}{2})^{10-ن} (\frac{1}{س})^{ن}$

$= {}^{10}ق_ن (\frac{1}{2})^{10-ن} (س)^{2(10-ن)} (\frac{1}{س})^{ن}$

$= {}^{10}ق_ن (\frac{1}{2})^{10-ن} (س)^{20-2ن} (س)^{-ن}$

$= {}^{10}ق_ن (\frac{1}{2})^{10-ن} (س)^{20-3ن}$

∴ بوضع ٢٠ − ٣ن = ٠ ∴ ن = $\frac{20}{3}$

∴ لا يوجد حد خالي من س

∴ بوضع ٢٠ − ٣ن = ٢ ∴ ن = ٦

∴ معامل $\frac{1}{س^{2}}$ هو $ح_7 = {}^{10}ق_6 (\frac{1}{2})^{4} = \frac{210}{16} = \frac{105}{8}$

٩

① $ح_{ن+1} = {}^{12}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{12-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{12}ق_ن (\frac{1}{2})^{12-ن} (س)^{-2(12-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{12}ق_ن (\frac{1}{2})^{12-ن} (س)^{-24+2ن} (س)^{3ن}$

∴ بوضع ٢٦ − ٣ن = ١ ∴ ن = $\frac{25}{3}$

∴ لا يوجد حد يشتمل على س

② $ح_9 = {}^{12}ق_8 (\frac{1}{2})^{4} (س)^{-16+24} (1)$

$ح_{11} = {}^{12}ق_{10} (\frac{1}{2})^{2} (س)^{-20+30} (1)$

∴ $س^{10} = (\frac{1}{2})^{4} = (\frac{1}{2})^{2}$

∴ س = $\frac{1}{4}$

١٠

$ح_{ن+1} = {}^{10}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{10-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{10}ق_ن (\frac{1}{2})^{10-ن} (س)^{-2(10-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{10}ق_ن (\frac{1}{2})^{10-ن} (س)^{-20+2ن} (س)^{3ن}$

$= {}^{10}ق_ن (\frac{1}{2})^{10-ن} (س)^{-20+5ن}$

∴ بوضع ٢٠ − ٥ن = صفر ∴ ن = ٤

∴ الحد الخالي من س هو $ح_5 = {}^{10}ق_4 (\frac{1}{2})^{6} = 210$

∴ الحدين الأوسطين هما $ح_5$ ، $ح_6$

$ح_5 = {}^{10}ق_4 (\frac{1}{2})^{6} (س)^{-20+20} = 210$

$ح_6 = {}^{10}ق_5 (\frac{1}{2})^{5} (س)^{-20+25} = 252 س^{5}$

∴ النسبة بين الحد الخالي من س ومجموع معاملي الحدين الأوسطين = $\frac{210}{210 + 252} = \frac{210}{462} = \frac{5}{11}$

١١

$ح_{ن+1} = {}^{12}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{12-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-2(12-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-24+2ن} (س)^{3ن}$

∴ بوضع ٢٠ − ٣ن = صفر ∴ ن = ٨

∴ الحد الخالي من س هو $ح_9 = {}^{12}ق_8 = 495$

∴ الحدين الأوسطين هما $ح_6$ ، $ح_7$

$ح_6 = {}^{12}ق_5 (س)^{-10} (س)^{15} = {}^{12}ق_5 س^{5}$

$ح_7 = {}^{12}ق_6 (س)^{-12} (س)^{18} = {}^{12}ق_6 س^{6}$

∴ النسبة بين الحد الخالي من س ومجموع معاملي الحدين الأوسطين = $\frac{495}{{}^{12}ق_5 + {}^{12}ق_6} = \frac{495}{1584} = \frac{5}{16}$

١٢

$ح_{ن+1} = {}^{10}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{10-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{-2(10-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{-20+2ن} (س)^{3ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{-20+5ن}$

∴ بوضع ٢٠ − ٥ن = صفر ∴ ن = ٤

∴ معامل الحد الأوسط هو

$ح_5 = {}^{10}ق_4 (\frac{1}{2})^{6} = 210 (\frac{1}{2})^{6} = \frac{105}{32}$

∴ بوضع ١٦ − ٣ن = ١٠ ∴ ن = ٢

∴ معامل س^{10} هو $ح_3 = {}^{8}ق_2 (\frac{1}{2})^{6} = 28 (\frac{1}{2})^{6} = \frac{28}{64}$

∴ $\frac{105}{32} = \frac{7}{16}$ ∴ $\frac{28}{64} = \frac{7}{16}$ ∴ $\frac{7}{16} = \frac{7}{16}$

١٣

$ح_{ن+1} = {}^{11}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{11-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{11}ق_ن (\frac{1}{2})^{11-ن} (س)^{-2(11-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{11}ق_ن (\frac{1}{2})^{11-ن} (س)^{-22+2ن} (س)^{3ن}$

$= {}^{11}ق_ن (\frac{1}{2})^{11-ن} (س)^{-22+5ن}$

∴ بوضع ٢٢ − ٥ن = صفر ∴ ن = ٧

∴ معامل س^{0} هو $ح_8 = {}^{11}ق_7 (\frac{1}{2})^{4} = 330 (\frac{1}{2})^{4} = 20.625$

∴ بوضع ٢٢ − ٣ن = ٤ ∴ ن = ٦

∴ معامل س^{4} هو $ح_7 = {}^{11}ق_6 (\frac{1}{2})^{5} = 462 (\frac{1}{2})^{5} = 14.4375$

∴ $14.4375 = \frac{231}{16}$ ∴ $\frac{231}{16} = 1$

∴ ٤ = ١

١٤

$(س - \frac{1}{س})^{9} (س - \frac{1}{س})^{9} = (س^{2} - \frac{1}{س^{2}})^{9}$

$ح_{ن+1} = {}^{9}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{9-ن} (س^{2})^{ن}$

$= {}^{9}ق_ن (-1)^{9-ن} (س)^{-2(9-ن)} (س)^{2ن}$

$= {}^{9}ق_ن (-1)^{9-ن} س^{-18+4ن}$

∴ بوضع ١٨ − ٤ن = ٦ ∴ ن = ٣

∴ معامل س^{6} هو $ح_4 = {}^{9}ق_3 (-1)^{6} = 84$

∴ بوضع ١٨ − ٤ن = −٣ ∴ ن = $\frac{21}{4}$ ∉ ط

∴ لا يوجد حد يشتمل على س$^{-3}$

١٥

$ح_{ن+1} = {}^{12}ق_ن (س^{2})^{12-ن} (\frac{1}{س^{3}})^{ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{2(12-ن)} (\frac{1}{س})^{3ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{24-2ن} (س)^{-3ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{24-5ن}$

∴ بوضع ٢٤ − ٥ن = ٤ ∴ ن = ٤

∴ الحد الخالي من س^{4} هو $ح_5 = {}^{12}ق_4 = 495$

∴ الحدين الأوسطين هما $ح_6$ ، $ح_7$

$ح_6 = {}^{12}ق_5 (س)^{14} (\frac{1}{س})^{15} = {}^{12}ق_5 س^{-1}$

$ح_7 = {}^{12}ق_6 (س)^{12} (\frac{1}{س})^{18} = {}^{12}ق_6 س^{-6}$

∴ النسبة بين الحد الخالي من س ومجموع معاملي الحدين الأوسطين = $\frac{495}{{}^{12}ق_5 + {}^{12}ق_6} = \frac{495}{1584} = \frac{5}{16}$

١٦

$ح_{ن+1} = {}^{10}ق_ن (س^{2})^{10-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{2(10-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{20-2ن} (س)^{3ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{20+ن}$

∴ بوضع ٢٠ + ن = ٢٥ ∴ ن = ٥

∴ الحد الأوسط هو $ح_6 = {}^{10}ق_5 س^{25} = 252 س^{25}$

∴ الحد الأوسط هو حد خالي من س

∴ قيمة هذا الحد عندما (س = ٨) = $ح_6 = 252 (8)^{5} = 8257152$

١٧

$ح_{ن+1} = {}^{12}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{12-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-2(12-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-24+2ن} (س)^{3ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-24+5ن}$

∴ بوضع ٢٤ − ٥ن = صفر ∴ ن = ٤٫٨

∴ لا يوجد حد خالي من س

∴ بوضع ٢٤ − ٥ن = ٣ ∴ ن = ٥٫٤

∴ $ح_{ن+1} = ح_6 = {}^{12}ق_5 س^{3}$

∴ $ح_{ن+1} = ح_7 = {}^{12}ق_6 س^{6}$

∴ $ح_{ن+1} = ح_8 = {}^{12}ق_7 س^{9}$

١٨

$ح_{ن+1} = {}^{11}ق_ن (\frac{س^{2}}{2})^{11-ن} (\frac{1}{س})^{ن}$

$= {}^{11}ق_ن (\frac{1}{2})^{11-ن} (س)^{2(11-ن)} (\frac{1}{س})^{ن}$

$= {}^{11}ق_ن (\frac{1}{2})^{11-ن} (س)^{22-2ن} (س)^{-ن}$

$= {}^{11}ق_ن (\frac{1}{2})^{11-ن} (س)^{22-3ن}$

∴ بوضع ٢٢ − ٣ن = صفر ∴ ن = ١٤

∴ $ح_{ن+1}$ هو الحد الخالي من س

$ح_{ن+1} = {}^{11}ق_{14} (\frac{1}{2})^{11-14} (س)^{22-42}$

$= {}^{11}ق_{14} (2)^{11} (س)^{-20}$

$= {}^{11}ق_{14} (2)^{11} (س)^{-20}$

∴ بوضع ٢ن − ٢٠ = ٠ ∴ ن = ١٤

١٩

$ح_{ن+1} = {}^{10}ق_ن (\frac{\sqrt{2}}{س})^{10-ن} (\frac{س}{\sqrt{2}})^{ن}$

$= {}^{10}ق_ن (\sqrt{2})^{10-ن} (س)^{-(10-ن)} (\frac{1}{\sqrt{2}})^{ن} (س)^{ن}$

$= {}^{10}ق_ن (\sqrt{2})^{10-2ن} (\frac{1}{\sqrt{2}})^{ن} (س)^{2ن-10}$

∴ بوضع ٢ن − ٢٥ = صفر ∴ ن = ١٢٫٥

قيمة $ح_{ن+1} = {}^{10}ق_{12} (\sqrt{2})^{-5} (\frac{1}{\sqrt{2}})^{12} = 252$

٢٠

$ح_{ن+1} = {}^{12}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{12-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-2(12-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-24+2ن} (س)^{3ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-24+5ن}$

∴ بوضع ٢٤ − ٥ن = صفر ∴ ن = ٤٫٨

∴ لا يوجد حد خالي من س

∴ بوضع ٢٤ − ٥ن = ٣ ∴ ن = ٥٫٤

∴ $ح_{ن+1} = ح_6 = {}^{12}ق_5 س^{3}$

∴ $ح_{ن+1} = ح_7 = {}^{12}ق_6 س^{6}$

∴ $ح_{ن+1} = ح_8 = {}^{12}ق_7 س^{9}$

٢١

$ح_{ن+1} = {}^{10}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{10-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{-2(10-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{-20+2ن} (س)^{3ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{-20+5ن}$

∴ بوضع ٢٠ − ٥ن = صفر ∴ ن = ٤

∴ الحد الخالي من س هو $ح_5 = {}^{10}ق_4 = 210$

∴ الحدين الأوسطين هما $ح_5$ ، $ح_6$

$ح_5 = {}^{10}ق_4 (س)^{-20+20} = 210$

$ح_6 = {}^{10}ق_5 (س)^{-20+25} = 252 س^{5}$

∴ النسبة بين الحد الخالي من س ومجموع معاملي الحدين الأوسطين = $\frac{210}{210 + 252} = \frac{210}{462} = \frac{5}{11}$

٢٢

$ح_{ن+1} = {}^{12}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{12-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-2(12-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-24+2ن} (س)^{3ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-24+5ن}$

∴ بوضع ٢٤ − ٥ن = صفر ∴ ن = ٤٫٨

∴ لا يوجد حد خالي من س

∴ بوضع ٢٤ − ٥ن = ٣ ∴ ن = ٥٫٤

∴ $ح_{ن+1} = ح_6 = {}^{12}ق_5 س^{3}$

∴ $ح_{ن+1} = ح_7 = {}^{12}ق_6 س^{6}$

∴ $ح_{ن+1} = ح_8 = {}^{12}ق_7 س^{9}$

٢٣

$ح_{ن+1} = {}^{10}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{10-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{-2(10-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{-20+2ن} (س)^{3ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{-20+5ن}$

∴ بوضع ٢٠ − ٥ن = صفر ∴ ن = ٤

∴ الحد الخالي من س هو $ح_5 = {}^{10}ق_4 = 210$

∴ الحدين الأوسطين هما $ح_5$ ، $ح_6$

$ح_5 = {}^{10}ق_4 (س)^{-20+20} = 210$

$ح_6 = {}^{10}ق_5 (س)^{-20+25} = 252 س^{5}$

∴ النسبة بين الحد الخالي من س ومجموع معاملي الحدين الأوسطين = $\frac{210}{210 + 252} = \frac{210}{462} = \frac{5}{11}$

٢٤

$ح_{ن+1} = {}^{12}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{12-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-2(12-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-24+2ن} (س)^{3ن}$

$= {}^{12}ق_ن (س)^{-24+5ن}$

∴ بوضع ٢٤ − ٥ن = صفر ∴ ن = ٤٫٨

∴ لا يوجد حد خالي من س

∴ بوضع ٢٤ − ٥ن = ٣ ∴ ن = ٥٫٤

∴ $ح_{ن+1} = ح_6 = {}^{12}ق_5 س^{3}$

∴ $ح_{ن+1} = ح_7 = {}^{12}ق_6 س^{6}$

∴ $ح_{ن+1} = ح_8 = {}^{12}ق_7 س^{9}$

٢٥

$ح_{ن+1} = {}^{10}ق_ن (\frac{1}{س^{2}})^{10-ن} (س^{3})^{ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{-2(10-ن)} (س)^{3ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{-20+2ن} (س)^{3ن}$

$= {}^{10}ق_ن (س)^{-20+5ن}$

∴ بوضع ٢٠ − ٥ن = صفر ∴ ن = ٤

∴ الحد الخالي من س هو $ح_5 = {}^{10}ق_4 = 210$

∴ الحدين الأوسطين هما $ح_5$ ، $ح_6$

$ح_5 = {}^{10}ق_4 (س)^{-20+20} = 210$

$ح_6 = {}^{10}ق_5 (س)^{-20+25} = 252 س^{5}$

∴ النسبة بين الحد الخالي من س ومجموع معاملي الحدين الأوسطين = $\frac{210}{210 + 252} = \frac{210}{462} = \frac{5}{11}$

∴ الحد الثالث من س = معامل الحد المشتمل على س^{٥} فى ك

∵ ح$_{ر+١}$ هو الحد الثالث من س

∴ ١٥ ن$_{ر}$ ن$_{٥}$ = صفر (٢) = صفر ∴ ن = ١

∴ معامل س^{٥} = ٥^{ر} ن$_{ر}$ = ١٠

٤٥

ح$_{ر+١}$ = أ$^{ن-ر}$ ن$_{ر}$ س^{ر}

، بوضع ر = ب ∴ معامل س^{ب} = أ$^{ن-ب}$ ن$_{ب}$

، بوضع ر = جـ ∴ معامل س^{جـ} = أ$^{ن-جـ}$ ن$_{جـ}$

∴ أ$^{ن-ب}$ ن$_{ب}$ = أ$^{ن-جـ}$ ن$_{جـ}$ ∴ أ = ب + جـ

٤٦

ح$_{ر+١}$ = ٢$^{ن-ر}$ ن$_{ر}$ س^{ر} ، بوضع ر = ك

∴ معامل س^{ك} = ٢$^{ن-ك}$ ن$_{ك}$ ، بوضع ر = ك + ٢

∴ معامل س$^{ك+٢}$ = ٢$^{ن-ك-٢}$ ن$_{ك+٢}$

∴ ٢$^{ن-ك}$ ن$_{ك}$ = ٢$^{ن-ك-٢}$ ن$_{ك+٢}$

∴ ك + ك + ٢ = ٢ ن ∴ ٢ ك + ٢ = ٢ ن

∴ ك + ١ = ن ∴ ك = ن − ١

٤٧

مفكوك = (س^{٢} + ١) [ن$_{ر}$ (١/س)^{ر}] (س)$^{ن-ر}$]

= (س^{٢} + ١) [(−١)^{ر} ن$_{ر}$ س$^{ن-ر}$ × س$^{-ن+ر}$]

= (س^{٢} + ١) [(−١)^{ر} ن$_{ر}$ × س$^{ن-٢ر}$]

= (−١)^{ر} ن$_{ر}$ س$^{ن-٢ر+٢}$ + (−١)^{ر}

× ن$_{ر}$ س$^{ن-٢ر}$

الجزء الأول يحتوى على س صفر إذا كان ١٢ − ٢ ر = صفر

∴ ر = ٦

وقيمته (−١)^{٦} × ن$_{٦}$ = ٢١٠

والجزء الثانى يحتوى على س صفر إذا كان ١٠ − ٢ ر = صفر

∴ ر = ٥

وقيمته (−١)^{٥} × ن$_{٥}$ = − ٢٥٢

∴ قيمة الحد الخالى من س = ٢١٠ − ٢٥٢ = − ٤٢

٤٨

ح$_{ر+١}$ هو الحد العام فى مفكوك (١ + س)^{١١}

= ١١ ن$_{ر}$ س^{ر}

∴ (١ − س + س^{٢}) × ١١ ن$_{ر}$ س^{ر}

= ١١ ن$_{ر}$ س^{ر} − ١١ ن$_{ر}$ س$^{ر+١}$ + ١١ ن$_{ر}$ س$^{ر+٢}$

الجزء الأول يحتوى على س^{٥}

، نضع ر = ٥ فيكون المعامل هو ١١ ن$_{٥}$

، الجزء الثانى يحتوى على س^{٥} ، نضع ر + ١ = ٥

∴ ر = ٤ فيكون المعامل هو − ١١ ن$_{٤}$

، الجزء الثالث يحتوى على س^{٥} ، نضع ر + ٢ = ٥

∴ ر = ٣ فيكون المعامل هو ١١ ن$_{٣}$

∴ معامل س^{٥} = ١١ ن$_{٥}$ − ١١ ن$_{٤}$ + ١١ ن$_{٣}$ = ٢٩٧

حل آخر :

(١ − س + س^{٢}) (١ + س)^{١١} = (١ − س + س^{٢})^{١١}

(١ + ١١ ن$_{١}$ س + ١١ ن$_{٢}$ س^{٢} + ١١ ن$_{٣}$ س^{٣}

+ ١١ ن$_{٤}$ س^{٤} + ١١ ن$_{٥}$ س^{٥} + ...)

∴ معامل س^{٥} = ١ × ١١ ن$_{٥}$ − ١ × ١١ ن$_{٤}$

+ ١ × ١١ ن$_{٣}$ = ٢٩٧

٤٩

ح$_{ر+١}$ = ٨ ن$_{ر}$ (١/س)^{ر} (س)$^{٨-ر}$

= ٨ ن$_{ر}$ (−١)^{ر} س$^{-ر}$ × س$^{٨-ر}$

= ٨ ن$_{ر}$ (−١)^{ر} س$^{٨-٢ر}$

حل آخر :

(١ + ٢ س)^{٥} (١ + ٣ س)^{٤}

= (١ + ٥ ن$_{١}$ × ٢ س + ٥ ن$_{٢}$ × (٢ س)^{٢} + ...)

(١ + ٤ ن$_{١}$ × ٣ س + ٤ ن$_{٢}$ (٣ س)^{٢} + ...)

= (١ + ١٠ س + ٤٠ س^{٢} + ...)

(١ + ١٢ س + ٦ ب^{٢} س^{٢} + ...)

∵ معامل س^{٢} = − ٢٦

∴ ٦ ب^{٢} + ٤٠ ب + ٤٠ = − ٢٦

∴ ٦ ب^{٢} + ٤٠ ب + ٦٦ = ٠

∴ ٣ ب^{٢} + ٢٠ ب + ٣٣ = ٠

∴ (ب + ٣) (٣ ب + ١١) = ٠

∴ ب = − ٣ أ، ب = − ١١/٣

٣٧

① نفرض أن ح$_{ر+١}$ هو الحد العام فى مفكوك

[١ + س (١ + س)]^{٦}

∴ ح$_{ر+١}$ = ٦ ن$_{ر}$ (س (١ + س))^{ر}

= ٦ ن$_{ر}$ س^{ر} (١ + س)^{ر} ، ر ≥ ٦

نفرض أن ح$_{ك+١}$ هو الحد العام فى مفكوك

(١ + س)^{ر} = ر ن$_{ك}$ س^{ك} ، ك ≥ ر

∴ ح$_{ر+١}$ = ٦ ن$_{ر}$ س^{ر} × ر ن$_{ك}$ س^{ك}

= ٦ ن$_{ر}$ × ر ن$_{ك}$ س$^{ر+ك}$

، ك ≥ ر ≥ ٦

لإيجاد معامل س^{٢} نضع ر + ك = ٢

ر	٢	٢
ك	٠	١

∴ معامل س^{٢} = ٦ ن$_{٢}$ × ٢ ن$_{٢}$ + ٦ ن$_{٢}$ × ٢ ن$_{١}$

= ٣٠ + ٢٠ = ٥٠

حل آخر :

(١ + س − س^{٢})^{٥} = [١ + (س − س^{٢})]^{٥}

= ١ + ٥ (س − س^{٢}) + ١٠ (س − س^{٢})^{٢} + ...

= ١ + ٥ س − ٥ س^{٢} + ١٠ (س^{٢} − ٢ س^{٣} + س^{٤}) + ...

∴ معامل س^{٢} = − ٥ + ١٠ = ٥

مفكوك (س + ٢)^{٤} (س − ١/س)^{٨}

= [س^{٢} + ٤ س + ٤] [ن$_{ر}$ س$^{٨-ر}$ (−١)^{ر} س$^{-ر}$]

= ن$_{ر}$ (−١)^{ر} س$^{٨-٢ر}$ + ٤ ن$_{ر}$ (−١)^{ر} س$^{٩-٢ر}$

+ ٤ ن$_{ر}$ (−١)^{ر} س$^{٨-٢ر}$

لإيجاد معامل س فى الجزء الأول نضع ١٠ − ٢ ر = ١

∴ ر = ٩/٢ ∉ ط

∴ لا يوجد معامل لـ س فى الجزء الأول

لإيجاد معامل س فى الجزء الثانى نضع ٩ − ٢ ر = ١

∴ ر = ٤

∴ قيمة معامل س فى الجزء الثانى

= ٤ × ٨ ن$_{٤}$ (−١)^{٤} = ٢٨٠

لإيجاد معامل س فى الجزء الثالث نضع ٨ − ٢ ر = ١

∴ ر = ٧/٢ ∉ ط

∴ لا يوجد معامل لـ س فى الجزء الثالث

∴ معامل س = ٢٨٠

٣٠

معتبر الحد العام لـ (١ − س)^{٨} هو ح$_{ر+١}$ = ٨ ن$_{ر}$ (−س)^{ر}

= (−١)^{ر} ن$_{ر}$ س^{ر}

ومعتبر الحد العام لـ (٣ + ٢ س)^{٦} هو ح$_{ك+١}$

= ٦ ن$_{ك}$ (٢ س)^{ك} (٣)$^{٦-ك}$

= (٢)^{ك} (٣)$^{٦-ك}$ ن$_{ك}$ س^{ك}

∴ المفكوك = (−١)^{ر} (٢)^{ك} (٣)$^{٦-ك}$ ن$_{ر}$ ن$_{ك}$ × س$^{ر+ك}$

، ك ≥ ٦ ، ر ≥ ٨

لإيجاد معامل س^{٢} نضع ر + ك = ٢

∴ ك = ٠ ، ر = ٢

∴ (−١)^{٢} (٢)^{٠} (٣)^{٦} × ٨ ن$_{٢}$ × ٦ ن$_{٠}$ = ٢٠٤١٢

أ، ك = ١ ، ر = ١

∴ (−١) (٢)^{١} (٣)^{٥} × ٨ ن$_{١}$ × ٦ ن$_{١}$ = − ٢٣٣٢٨

أ، ك = ٢ ، ر = ٠

∴ (−١)^{٠} (٢)^{٢} (٣)^{٤} × ٨ ن$_{٠}$ × ٦ ن$_{٢}$ = ٤٨٦٠

∴ معامل س^{٢} = ٢٠٤١٢ − ٢٣٣٢٨ − ٤٨٦٠ = ١٩٤٤

٣١

نفرض أن ح$_{ر+١}$ هو الحد العام لمفكوك (١ + ٢ س)^{٩}

∴ ح$_{ر+١}$ = ٩ ن$_{ر}$ (٢ س)^{ر} = ٩ ن$_{ر}$ × (٢)^{ر} × س^{ر}

، نفرض أن ح$_{ر+١}$ هو الحد العام لمفكوك (١ + ب س)^{٩}

∴ ح$_{ر+١}$ = ٩ ن$_{ر}$ (ب س)^{ر} = ٩ ن$_{ر}$ (ب)^{ر} س^{ر}

∴ الحد العام لمفكوك (١ + ٢ س)^{٩} (١ + ب س)^{٩}

= (٢)^{ر} × ب^{ر}

× ٩ ن$_{ر}$ × ٩ ن$_{ك}$ س$^{ر+ك}$ ، ك

ك ≥ ٤ ، ر ≥ ٥

لإيجاد معامل س^{٢} نضع ر = ٥ ، ك = ٢

∴ ٢^{٥} × ب^{٥} × ٩ ن$_{٥}$ × ٩ ن$_{٢}$ = ٦ ب^{٥}

أ، ر = ١ ، ك = ١

∴ ٢ × ب^{٥} × ٩ ن$_{٤}$ × ٩ ن$_{١}$ = ٤٠ ب^{٥}

أ، ر = ٢ ، ك = ٠

∴ ٢^{٥} × ب^{٥} × ٩ ن$_{٥}$ × ٩ ن$_{٠}$ = ٤٠

∴ ٦ ب^{٥} + ٤٠ ب^{٥} + ٤٠ = − ٢٦

∴ ٦ ب^{٥} + ٤٠ ب^{٥} + ٦٦ = ٠

∴ ٣ ب^{٥} + ٢٠ ب^{٥} + ٣٣ = ٠

∴ (ب + ٣) (٣ ب^{٤} + ٢٠ ب^{٣} + ٣٣ ب^{٢} + ٣٠ ب + ١١) = ٠

∴ ب = − ٣ ∉ ك ، ب^{٤} + ٢٠ ب^{٣} + ٣٣ ب^{٢} + ٣٠ ب + ١١ = ٠

① (١ − س^{١١}) (١ − س^{٢٤})^{٢} (١ + س^{٢})^{١٢}

= (١ + س^{٢٤} − س^{١١} − س^{٣٥}) (١ + س^{٢٤})^{٢} (١ + س^{٢})^{١٢}

∵ الحد العام فى مفكوك (١ + س^{٢})^{١٢} هو

ح$_{ر+١}$ = ١٢ ن$_{ر}$ س^{٢ر}

∴ (١ + س^{١١} + س^{٢٤} + س^{٣٥}) × ١٢ ن$_{ر}$ س^{٢ر}

= ١٢ ن$_{ر}$ س^{٢ر} + ١٢ ن$_{ر}$ س$^{٢ر+١١}$

+ ١٢ ن$_{ر}$ س$^{٢ر+٢٤}$ + ١٢ ن$_{ر}$ س$^{٢ر+٣٥}$

∵ ٢ ر = ٢٤ عندما ر = ١٢

، ٢ ر + ١٢ = ٢٤ عندما ر = ٦

، ٢ ر + ٢٤ = ٢٤ عندما ر = ٠

، ٢ ر + ٣٦ = ٢٤ عندما ر = − ٦ (مرفوض)

∴ معامل س^{٢٤} فى المفكوك = ١٢ ن$_{١٢}$

+ ١٢ ن$_{٦}$ + ١٢ ن$_{٠}$

= ٢ + ٢

⑤ (١ − ١/س)^{٨} (س + ١)^{٨} = ((س − ١)/س)^{٨} (س + ١)^{٨}

= (١ − س^{٢})^{٨} / س^{٨}

∴ ح$_{ر+١}$ = ٨ ن$_{ر}$ × س$^{-٨}$ × (−س^{٢})^{ر}

= (−١)^{ر} × ٨ ن$_{ر}$ × س$^{٢ر-٨}$

بوضع ٢ ر − ٨ = ٠ ∴ ر = ٤

∴ الحد الخالى من س = (−١)^{٤} × ٨ ن$_{٤}$ = ٨ ن$_{٤}$

⑥ نفرض أن ح$_{ر+١}$ هو الحد العام فى مفكوك

(١ + س)^{٢٠}

∴ ح$_{ر+١}$ = ٢٠ ن$_{ر}$ س^{ر} ∴ ح$_{ر+١}$ = ٢٠ ن$_{ر}$ × س^{٢ر} بوضع ر = ٢ ب

، نفرض أن : ح$_{ك+١}$ هو الحد العام فى مفكوك

(١ + س)$^{٢ر-١}$

∴ ح$_{ر+١}$ = ٢ ن$_{ر}$ × س$^{٢ر-١}$

∴ الحد الثالث من س = معامل الحد المشتمل على س^{٢} فى ك

∵ ح$_{ر+١}$ هو الحد الثالث من س

∴ ٢٠ − ٢ ر = ٢ ∴ ر = ٩

∴ معامل س^{٢} = ٢٠ ن$_{٩}$ = ٢٠ ن$_{١١}$ = ٢٠ ن$_{٩}$ = ١٩٠

٣٢

① نفرض أن ح$_{ر+١}$ هو الحد العام فى مفكوك

[١ + س (١ + س)]^{١٠}

∴ ح$_{ر+١}$ = ١٠ ن$_{ر}$ (س (١ + س))^{ر}

= ١٠ ن$_{ر}$ س^{ر} (١ + س)^{ر} ، ر ≥ ٦

نفرض أن ح$_{ك+١}$ هو الحد العام فى مفكوك

(١ + س)^{ر} = ر ن$_{ك}$ س^{ك} ، ك ≥ ر

∴ ح$_{ر+١}$ = ١٠ ن$_{ر}$ س^{ر} × ر ن$_{ك}$ س^{ك}

= ١٠ ن$_{ر}$ × ر ن$_{ك}$ س$^{ر+ك}$

، ك ≥ ر ≥ ٦

لإيجاد معامل س^{٢} نضع ر + ك = ٢

ر	٢	٢
ك	٠	١

∴ معامل س^{٢} = ١٠ ن$_{٢}$ × ر ن$_{٠}$ × ٢ ن$_{١}$

= ٤٥ × ١ × ٢ = ٩٠

② نفرض أن ح$_{ر+١}$ هو الحد العام فى مفكوك

(١ + س + س^{٢})^{١٠} = ((١ + س) + س^{٢})^{١٠}

= (١ + س)^{١٠} + ١٠ (١ + س)^{٩} س^{٢} + ...

∴ الحد العام = ح$_{ر+١}$ × ح$_{ك+١}$

= ١٠ ن$_{ر}$ س^{ر} × ر ن$_{ك}$ س^{ك} × ٢

= ١٠ ن$_{ر}$ × ر ن$_{ك}$ × ٢ س$^{ر+ك}$

بوضع ر + ك = ٤

ر	٤	٣	٢
ك	٠	١	٢

∴ معامل س^{٤} = ١٠ ن$_{٤}$ + ١٠ ن$_{٣}$ × ر ن$_{١}$ × ٢

+ ١٠ ن$_{٢}$ × ر ن$_{٢}$ × ٢^{٢}

= ٢١٠ + ٩٠ + ٤٥ × ٤ = ٣٠٠

③ ٢ ك ر$_{ك}$ [ن$_{ر}$ س^{ر} (س − ١)^{ر} × ٢$^{ك-ر}$]

= (س − ١ + ٢)^{٥} = (١ + س)^{٥}

∴ معامل س^{١٣} = ٥ ن$_{١٣}$

④ (١ + س + س^{٢} + س^{٣})^{٥} = ((١ + س)

+ س^{٢} (١ + س))^{٥}

= (١ + س)^{٥} (١ + س^{٢})^{٥}

الحد العام = ح$_{ر+١}$ × ح$_{ك+١}$

= ٥ ن$_{ر}$ س^{ر} × ٥ ن$_{ك}$ س^{٢ك}

= ٥ ن$_{ر}$ × ٥ ن$_{ك}$ س$^{ر+٢ك}$

بوضع ر + ٢ ك = ٤

ر	٤	٢	٠
ك	٠	١	٢

∴ معامل س^{٤} = ٥ ن$_{٤}$ × ٥ ن$_{٠}$

+ ٥ ن$_{٢}$ × ٥ ن$_{١}$ + ٥ ن$_{٠}$ × ٥ ن$_{٢}$

= ٥ ن$_{٤}$ + ٥ ن$_{٢}$ × ٥ ن$_{١}$ + ٥ ن$_{٠}$ × ٥ ن$_{٢}$

إجابات تمارين

2 الوحدة

الأعـــداد المركبـــة

إجابات تمارين على المعادلات التربيعية

1

① (ب)	② (ه)	③ (د)	④ (أ)	⑤ (ب)
⑥ (ه)	⑦ (د)	⑧ (أ)	⑨ (ب)	⑩ (ه)
⑪ (أ)	⑫ (ب)	⑬ (ب)	⑭ (أ)	⑮ (ه)
⑯ (ه)	⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (ب)	⑳ (ه)
㉑ (ه)	㉒ (ب)	㉓ (ب)	㉔ (ب)	㉕ (ب)
㉖ (ب)				

2

① $(3-2ت)^2+(3+2ت)^2$
$=(9-4-12ت)+(9-4+12ت)=10$

② $(1+ت)^4-(1-ت)^4$
$=((1+ت)^2)^2-((1-ت)^2)^2$
$=(2ت)^2-(-2ت)^2=-4-(-4)=$ صفر

③ $(1-ت)^2(1-ت^2)(1-ت^4)$
$=(1-ت)(1-ت)^2(1-ت^2)$
$=(1-ت)(1-ت)(1-ت)(1-(-ت))$
$=(1-ت)\times2\times(1+ت)=2\times2=4$

④ $(\sqrt{58}-\sqrt{2})(\sqrt{18}-\sqrt{2})(\sqrt{32}-\sqrt{2})$
$=(\sqrt{2}\times\sqrt{29}-\sqrt{2})(\sqrt{2}\times\sqrt{9}-\sqrt{2})(\sqrt{2}\times\sqrt{16}-\sqrt{2})$
$=(\sqrt{2}\times\sqrt{29}-\sqrt{2})(\sqrt{2}\times3-\sqrt{2})(\sqrt{2}\times4-\sqrt{2})$
$=12\sqrt{2}-8\sqrt{2}ت-18\sqrt{2}ت-36$
$=-24-26\sqrt{2}ت$

⑤ $(2-\frac{1}{2}ت)^3=(\frac{1}{2}(4-ت))^3=(\frac{1}{2})^3(4-ت)^3$
$=(1-\frac{1}{4}ت)^3=1^3-3(\frac{1}{4}ت)+3(\frac{1}{4}ت)^2-(\frac{1}{4}ت)^3$
$=1-\frac{3}{4}ت-\frac{9}{16}+\frac{27}{64}ت=\frac{-144}{64}ت=\frac{-11}{64}-\frac{45}{64}ت$

∴ $س=$ صفر

وبالتعويض منها فى (١) ∴ $س^2-س=0$

∴ $س^2-س=0$

∴ $س=$ صفر أو $س=1$

∴ $ع=$ صفر أ، $ع=1$

أو $2س+1=0$

∴ $س=-\frac{1}{2}$ وبالتعويض منها فى (١)

∴ $(-\frac{1}{2})^2-ص^2=(\frac{1}{2})^2=0$

∴ $\frac{1}{4}-ص^2+\frac{1}{4}=0$

∴ $ص^2=\frac{2}{4}$ ∴ $ص=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $ع=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}ت$ أ، $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}ت$

وهما مترافقان.

∴ قيم ع هى $\{$صفر، 1، $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}ت$، $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}ت\}$

حل آخر :

∵ $ع^2=\overline{ع}$ (١) ∴ $\overline{ع^2}=\overline{\overline{ع}}=ع$

∴ $\overline{ع}=ع$ (٢)

وبتربيع طرفى المعادلة (١) $ع^4=\overline{ع}$ (٣)

من (٢)، (٣) ∴ $ع^4=ع$ ∴ $ع^4-ع=0$

∴ $ع(ع^3-1)=0$

∴ $ع(ع-1)(ع^2+ع+1)=0$

∴ $ع=0$ أ، $ع=1$ أ، $ع^2+ع+1=0$

ومنها $ع=\frac{-1\pm\sqrt{3}ت}{2}$

∴ قيم ع هى $\{$صفر، 1، $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}ت$، $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ت\}$

3

نفرض أن $ع=س+ص ت$

حيث $س$، $ص$ عددان حقيقيان.

∴ $2ع-3\overline{ع}=5+10ت$

∴ $2(س+ص ت)-3(س-ص ت)$
$=5+10ت$

∴ $-س+5ت ص=5+10ت$

∴ $-س=5$ ومنها $س=-5$

$5ت ص=10$ ومنها $ص=2$

∴ م$=\{-5+2ت\}$

حل آخر :

∵ $2ع-3\overline{ع}=5+10ت$ (١)

∴ $2\overline{ع}-3ع=5-10ت$ (٢)

بضرب المعادلة (١) × ٢ والمعادلة (٢) × ٣

∴ $4ع-6\overline{ع}=10+20ت$ (٣)

، $6\overline{ع}-9ع=15-30ت$ (٤)

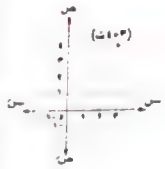
بجمع (٣)، (٤) ∴ $-5ع=25-10ت$

∴ $ع=-5+2ت$

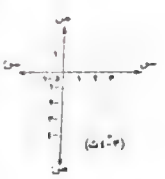
إجابات تمارين 6

1

① $ع=3+4ت$



② $\overline{ع}=3-4ت$



③ $\frac{2}{ع}=\frac{2}{ع}\times\frac{\overline{ع}}{\overline{ع}}=\frac{2\overline{ع}}{ع\overline{ع}}=\frac{2(3-ت)}{9+1}$

$=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}ت$

④ $\frac{ع}{\overline{ع}}=\frac{ع}{\overline{ع}}\times\frac{ع}{ع}=\frac{ع^2}{ع\overline{ع}}=\frac{(3+ت)^2}{10}$

$=\frac{9+6ت-1}{10}=\frac{8+6ت}{10}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}ت$

⑤ $\frac{ع-1}{ع+1}=\frac{(ع-1)(\overline{ع}+1)}{(ع+1)(\overline{ع}+1)}=\frac{ع\overline{ع}-ع+\overline{ع}-1}{ع\overline{ع}+ع+\overline{ع}+1}$

$=\frac{10-(ع+\overline{ع})-1}{10+(ع+\overline{ع})+1}=\frac{9-2س}{11+2س}$

$=\frac{9-6}{11+6}=\frac{3}{17}$

⑥ $\frac{ع}{3-ت}=\frac{ع}{3-ت}\times\frac{3+ت}{3+ت}=\frac{ع(3+ت)}{10}$

$=\frac{(3+ت)^2}{10}=\frac{8+6ت}{10}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}ت$

⑦ $\frac{ع}{\overline{ع}}=\frac{ع}{\overline{ع}}\times\frac{ع}{ع}=\frac{ع^2}{ع\overline{ع}}=\frac{(2+ت)^2}{5}$

$=\frac{4+4ت-1}{5}=\frac{3+4ت}{5}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}ت$

⑧ $\frac{1-ت}{\sqrt{2}ت}=\frac{(1-ت)\sqrt{2}ت}{2ت^2}=\frac{(1-ت)\sqrt{2}ت}{-2}$

$=\frac{\sqrt{2}ت+\sqrt{2}}{-2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}ت$

2

① $س^2+1=0$ ∴ $س^2=-1$

∴ $س=\pm\sqrt{-1}=\pm ت$

∴ م$=\{ت، -ت\}$

② $س^4-16=0$ ،

∴ $(س^2-4)(س^2+4)=0$

∴ $س^2-4=0$ أو $س^2+4=0$ ،

∴ $س^2=4$ | ∴ $س^2=-4$

∴ $س=\pm2$ | ∴ $س=\pm\sqrt{-4}=\pm2ت$

∴ م$=\{2، -2، 2ت، -2ت\}$

③ $س^2+4=0$ ،

∴ $2^2+ت^2=0$ ، $ب=0$ ، $جـ=4$

∴ $س=\frac{-ب\pm\sqrt{ب^2-4أجـ}}{2أ}=\frac{0\pm\sqrt{0-16}}{2}$

$=\frac{\pm4ت}{2}=\pm2ت$

∴ م$=\{2ت، -2ت\}$

④ $س^2+6س+10=0$ ،

∴ $س=\frac{-6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\frac{-6\pm2ت}{2}=-3\pm ت$

∴ م$=\{-3+ت، -3-ت\}$

⑤ $س^2-2س+26=0$ ،

∴ $س=\frac{2\pm\sqrt{4-104}}{2}=\frac{2\pm10ت}{2}=1\pm5ت$

∴ م$=\{1+5ت، 1-5ت\}$

⑥ $2س^2+ت ص=5+10ت$

∴ $-س+5ت ص=5+10ت$

∴ $-س=5$ ومنها $س=-5$

$5ت ص=10$ ومنها $ص=2$

∴ م$=\{-5+2ت\}$

حل آخر :

∵ $2ع-3\overline{ع}=5+10ت$ (١)

∴ $2\overline{ع}-3ع=5-10ت$ (٢)

بضرب المعادلة (١) × ٢ والمعادلة (٢) × ٣

∴ $4ع-6\overline{ع}=10+20ت$ (٣)

، $6\overline{ع}-9ع=15-30ت$ (٤)

بجمع (٣)، (٤) ∴ $-5ع=25-10ت$

∴ $ع=-5+2ت$

4

① $3س-ص=2$ (١)

، $س+ص=3$ (٢)

∴ $(س-ص)(س+ص)=3$

∴ $(س-ص)\times3=3$

∴ $س-ص=1$ (٣)

بحل (٢)، (٣)

∴ $س=2$ ، $ص=1$

② $(س+2ت ص)^2+\frac{8(1-ت)}{1-ت}=15+0ت$

∴ $س^2+4ص^2+4س ص+8=15$

∴ $س^2+4ص^2+4س ص-8ت=15+0ت$

∴ $س^2+4ص^2=15$ (١)

، $4س ص-8=0$ (٢)

∴ $4س ص=8$

∴ $س ص=2$

∴ $ص=\frac{2}{س}$

وبالتعويض فى (١)

∴ $س^2+\frac{4}{س^2}=15$

∴ $س^4+4=15س^2$

∴ $س^4-15س^2+4=0$

، $(س^2-\frac{15}{2})^2=\frac{225}{4}-4$

∴ $(س^2-\frac{15}{2})^2=\frac{217}{4}$

∴ $س^2-\frac{15}{2}=\pm\frac{\sqrt{217}}{2}$

∴ $س^2=\frac{15}{2}\pm\frac{\sqrt{217}}{2}$

∴ $س^2=\frac{15+\sqrt{217}}{2}$ مرفوض

، $س^2=\frac{15-\sqrt{217}}{2}$

∴ $س=1$ ومنها $ص=2$

أ، $س=-1$ ومنها $ص=-2$

5

∵ -3 جذر للمعادلة

∴ $س+3$ هو عامل من عوامل المقدار

$س^3+ب س^2-س+15$

وباستخدام القسمة التركيبية

	١	ب	-١	١٥
-٣		-٣	٣	-١٥
	١	ب-٣	٢	٠

∴ $(س+3)(س^2+(ب-3)س+5)=0$

∴ $س^2+(ب-3)س+5=0$

∴ $ب-3=-2$ ، $جـ=5$

∴ $ب=1$ ، $جـ=5$

∴ $س=\frac{-(ب-3)\pm\sqrt{(ب-3)^2-4أجـ}}{2أ}=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}$

$=\frac{2\pm4ت}{2}=1\pm2ت$

∴ العددان الآخران هما $1+2ت$، $1-2ت$

6

نفرض أن $ع=س+ص ت$

حيث $س$، $ص$ عددان حقيقيان

∴ $ع^2=$

∴ $س^2-ص^2+2س ص ت=(س-ص)+(س+ص)ت$

∴ $س^2-ص^2=س-ص$ (١)

∴ $2س ص=س+ص$ (٢)

7

① $ع=3(جتا 90° + ت جا 90°)$

② $ع=4(جتا 150° + ت جا 150°)$

③ $ع=\sqrt{2}(جتا 45° + ت جا 45°)$

8

① $ع=-3$ ∴ $|ع|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3$

، $\theta=180°$ ∴ $ع=3(جتا 180° + ت جا 180°)$

② $ع=2ت$ ∴ $|ع|=2$ ، $\theta=90°$

∴ $ع=2(جتا 90° + ت جا 90°)$

③ $ع=1+ت$ ∈ الربع الأول

∴ $|ع|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

، $ظا\theta=1$ ∴ $\theta=45°$

∴ $ع=\sqrt{2}(جتا 45° + ت جا 45°)$

④ $ع=\sqrt{2}-\sqrt{2}ت$ ∈ الربع الثانى.

∴ $|ع|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=2$

، $ظا\theta=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$ ∴ $\theta=135°$

∴ $ع=2(جتا 135° + ت جا 135°)$

⑤ $ع=-1-ت$ ∈ الربع الثالث.

∴ $|ع|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

، $ظا\theta=1$ ∴ $\theta=-135°$

∴ $ع=\sqrt{2}(جتا -135° + ت جا -135°)$

⑥ $ع=4-4\sqrt{3}ت$ ∈ الربع الرابع

∴ $|ع|=\sqrt{4^2+(-4\sqrt{3})^2}=8$

، $ظا\theta=-\sqrt{3}$ ∴ $\theta=-60°$

∴ $ع=8(جتا -60° + ت جا -60°)$

9

① $ع=2(جتا 90° + ت جا 90°)$

② $ع=4(جتا 150° + ت جا 150°)$

③ $ع=\sqrt{2}(جتا 45° + ت جا 45°)$

10

① الصورة المثلثية $ع=2(جتا 0° + ت جا 0°)$

، الصورة الجبرية $ع=2$

② الصورة المثلثية $ع=2(جتا \frac{\pi}{2} + ت جا \frac{\pi}{2})$

، الصورة الجبرية $ع=2ت$

③ الصورة المثلثية $ع=1(جتا -150° + ت جا -150°)$

، الصورة الجبرية $ع=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}ت$

④ الصورة المثلثية $ع=\sqrt{2}(جتا \frac{-3\pi}{4} + ت جا \frac{-3\pi}{4})$

، الصورة الجبرية $ع=-1-ت$

$= ١٦ \left(جتا \frac{\pi}{٤} + ت جا \frac{\pi}{٤} \right)$

$∵ ع_١ ع_٢ = ٤ × ٧ \left(جتا \left(\frac{\pi}{٣} + \frac{\pi}{٣} \right) \right)$

$ع_١ = ٧ \left(جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣} \right)$

④ $ع^٣ = -٨ \left(جتا \frac{\pi}{٢} - ت جا \frac{\pi}{٢} \right)$

④ $ع^٤ = \frac{١}{٤} \left(جتا ٥٠° - ت جا ٥٠° \right)$

① $ع_١ ع_٢ = ر_١ ر_٢ \left(جتا (ل + م + ل - م) \right)$

١١

[illegible]

١٢

[illegible]

[illegible]

∴ س$^{-1}$ = $\frac{1}{س}$ = ٢ ت ما٥θ (١)

وفى حالة س = ما θ − ت ما θ = ما − θ − ت ما − θ

∴ س$^{-1}$ = ما − ٥θ + ت ما − ٥θ

= ما٥θ − ت ما٥θ

∴ $\frac{1}{س}$ = ما٥θ + ت ما٥θ

∴ س^{5} + $\frac{1}{س^{5}}$ = ٢ ما٥θ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ س^{5} − $\frac{1}{س^{5}}$ = ٢ت ما٥θ

٣٧

ج$_{1}$ = ١ (ما ٢θ + ت ما ٢θ)

، ج$_{2}$ = ١٣ (ما θ − ت ما θ)

= ١٣ (ما − θ + ت ما − θ)

∴ ج$_{1}$ ج$_{2}$ = ٤ × ١٣ (ما ٢(θ − θ) + ت ما ٢(θ − θ))

= ٥٢ (ما θ + ت ما θ) (الصورة المثلثية)

= ٥٢ ما θ + ٥٢ ت ما θ

= $\frac{١٢}{١٣}$ × ٥٢ + $\frac{٥}{١٣}$ × ٥٢ ت

= ٤٨ + ٢٠ ت

(الصورة الجبرية)

، ج$_{1}^{٢}$ = [١٣ (ما − θ + ت ما − θ)]^{٢}

= ١٦٩ (ما − ٢θ + ت ما − ٢θ) (الصورة المثلثية)

= ١٦٩ ما − ٢θ + ١٦٩ ت ما − ٢θ

= ١٦٩ (٢ ما^{٢} θ − ١) − ١٦٩ ت (٢ ما θ ما θ)

= $\frac{١١٩}{١٦٩}$ × ١٦٩ − $\frac{١٢٠}{١٦٩}$ × ١٦٩ ت

= ١١٩ − ١٢٠ ت (الصورة الجبرية)

٣٨

∵ س + ت ص = (١ + ت)^{ن}

∴ | س + ت ص | = | (١ + ت)^{ن} |

∴ $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{(١)^{٢} + (ب)^{٢}}^{ن}$ بالتربيع

∴ س^{٢} + ص^{٢} = (١^{٢} + ب^{٢})^{ن}

حل آخر : ∵ س + ت ص = (١ + ت)^{ن} (١)

∴ س + ت ص = (١ + ت)^{ن}

∴ س − ت ص = (١ − ت)^{ن} (٢)

بضرب (١) × (٢) :

∴ س^{٢} + ص^{٢} = [(١ + ت) (١ − ت)]^{ن}

∴ س^{٢} + ص^{٢} = (١^{٢} + ب^{٢})^{ن}

٣٩

∵ (ما س + ت ما س)^{٥} = (ما س + ت ما س)^{٥}

∴ ما ٥س + ت ما ٥س = ما^{٥} س

+ ^{٥}م$_{١}$ ما^{٤} س (ت ما س) + ^{٥}م$_{٢}$ ما^{٣} س (ت ما س)^{٢}

+ ^{٥}م$_{٣}$ ما^{٢} س (ت ما س)^{٣}

+ ^{٥}م$_{٤}$ ما س (ت ما س)^{٤} + (ت ما س)^{٥}

= ما^{٥} س + ت (٥ ما^{٤} س ما س) − ١٠ ما^{٣} س ما^{٢} س

− ت (١٠ ما^{٣} س ما^{٢} س) + ٥ ما س ما^{٢} س + ت ما^{٥} س

بمقارنة الجزء التخيلى

∴ ما ٥س = ٥ ما^{٤} س ما س

− ١٠ ما^{٣} س ما^{٢} س + ما^{٥} س

∴ $\frac{ما ٥س}{ما س}$ = ٥ ما^{٤} س − ١٠ ما^{٢} س

(١ − ما^{٢} س) + ما^{٤} س

= ٥ ما^{٤} س − ١٠ ما^{٢} س

+ ١٠ ما^{٤} س + (١ − ما^{٢} س)^{٢}

= ٥ ما^{٤} س − ١٠ ما^{٢} س + ١٠ ما^{٤} س

+ ١ − ٢ ما^{٢} س + ما^{٤} س

= ١٦ ما^{٤} س − ١٢ ما^{٢} س + ١

٤٠

ج$_{1}$ = ٤ (ما ٢θ + ت ما ٢θ)

، ج$_{2}$ = ٣ (ما θ − ت ما θ)

∴ ج$_{1}$ ج$_{2}$ = ١٢ (ما ٢θ ما θ + ت ما ٢θ ما θ)

= ١٢ (ما ٣θ + ما θ + ت ما ٣θ − ت ما θ)

∴ ج$_{1}$ ج$_{2}$ = ١٢ (ما ٣θ + ما θ) + ١٢ ت (ما ٣θ − ما θ)

∴ ج$_{1}$ ج$_{2}$ = ٢٤ ما ٢θ ما θ + ٢٤ ت ما θ ما ٢θ

∴ $\frac{ج_{1}}{ج_{2}}$ = $\frac{٢٤ ما ٢θ ما θ + ٢٤ ت ما θ ما ٢θ}{ج_{2} ج_{2}}$

∴ $\frac{ج_{1}}{ج_{2}}$ = $\frac{٢٤ ما ٢θ ما θ + ٢٤ ت ما θ ما ٢θ}{٩ ج_{2}^{٢}}$

∴ $\frac{ج_{1}}{ج_{2}}$ = $\frac{٨}{٣}$ ما ٢θ ما θ + $\frac{٨}{٣}$ ت ما θ ما ٢θ

٤١

∵ ج$_{1}$ = ٤ (ما ٢θ + ت ما ٢θ)

، ج$_{2}$ = ٣ (ما θ − ت ما θ)

∴ ج$_{1}$ ج$_{2}$ = ١٢ (ما ٢θ ما θ + ت ما ٢θ ما θ)

= ١٢ (ما ٣θ + ما θ + ت ما ٣θ − ت ما θ)

∴ ج$_{1}$ ج$_{2}$ = ١٢ (ما ٣θ + ما θ) + ١٢ ت (ما ٣θ − ما θ)

∴ $\frac{ج_{1}}{ج_{2}}$ = $\frac{١٢ (ما ٣θ + ما θ) + ١٢ ت (ما ٣θ − ما θ)}{ج_{2} ج_{2}}$

∴ $\frac{ج_{1}}{ج_{2}}$ = $\frac{١٢ (ما ٣θ + ما θ) + ١٢ ت (ما ٣θ − ما θ)}{٩ ج_{2}^{٢}}$

∴ $\frac{ج_{1}}{ج_{2}}$ = $\frac{٤}{٣}$ (ما ٣θ + ما θ) + $\frac{٤}{٣}$ ت (ما ٣θ − ما θ)

٤٢

ج = ٥ (ما θ + ت ما θ)

∴ ج$^{-1}$ = $\frac{1}{٥}$ (ما θ + ت ما θ)$^{-1}$

= $\frac{1}{٥}$ (ما − θ + ت ما − θ) (الصورة المثلثية)

= $\frac{1}{٥}$ ما − θ + $\frac{1}{٥}$ ت ما − θ

= $\frac{1}{٥}$ ما θ − $\frac{1}{٥}$ ت ما θ = $\frac{٤}{٥}$ − $\frac{1}{٥}$ ت

(الصورة الجبرية)

، ج^{٢} = (ج$^{-1}$)^{٢} = $\frac{1}{٢٥}$ (ما − ٢θ + ت ما − ٢θ)

= $\frac{1}{٢٥}$ ((٢ ما^{٢} θ − ١) − ت (٢ ما θ ما θ))

= $\frac{-٧}{٢٥}$ − $\frac{٢٤}{٢٥}$ ت

(ج$^{-1}$)^{٢} = (٥ (ما θ − ت ما θ))$^{-٢}$

= $\frac{1}{٢٥}$ (ما ٢θ + ت ما ٢θ)

= $\frac{1}{٢٥}$ ((٢ ما^{٢} θ − ١) + ت (٢ ما θ ما θ))

= $\frac{-٧}{٢٥}$ − $\frac{٢٤}{٢٥}$ ت

حل آخر : (ج$^{-1}$)^{٢} = (ج^{٢})$^{-1}$ = $\frac{-٧}{٢٥}$ − $\frac{٢٤}{٢٥}$ ت

٤٣

الطرف الأيمن = $\left[\frac{ما \frac{θ}{٢} + ت ما \frac{θ}{٢}}{ما \frac{θ}{٢} − ت ما \frac{θ}{٢}}\right]^{ن}$

= $\left[\frac{ما \frac{θ}{٢} + ت ما \frac{θ}{٢}}{ما (\frac{π}{٢} − \frac{π}{٢} + \frac{θ}{٢}) + ت ما (\frac{π}{٢} − \frac{π}{٢} + \frac{θ}{٢})}\right]^{ن}$

= (ما (\frac{π}{٢} − θ) + ت ما (\frac{π}{٢} − θ))^{ن}

= ما ن (\frac{π}{٢} − θ) + ت ما ن (\frac{π}{٢} − θ) = الطرف الأيسر

٤٤

(١ + ت)^{ن} = [$\sqrt{٢}$ (ما $\frac{π}{٤}$ + ت ما $\frac{π}{٤}$)]^{ن}

= $\sqrt{٢}^{ن}$ (ما $\frac{ن π}{٤}$ + ت ما $\frac{ن π}{٤}$) الصورة المثلثية

= ($\sqrt{٢}^{ن}$ ما $\frac{ن π}{٤}$) + ت ($\sqrt{٢}^{ن}$ ما $\frac{ن π}{٤}$) الصورة الجبرية

∴ ا = $\sqrt{٢}^{ن}$ ما $\frac{ن π}{٤}$ ، ب = $\sqrt{٢}^{ن}$ ما $\frac{ن π}{٤}$

٤٥

① (ب) ② (د) ③ (ه) ④ (أ)

⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (ج)

إرشادات للحل ٤٥ :

① ∵ | ج$_{1}$ | = | ج$_{2}$ | = | ج$_{3}$ | = ١

∴ | ج$_{1}$ |^{٢} = | ج$_{2}$ |^{٢} = | ج$_{3}$ |^{٢} = ١

∴ ج$_{1}$ $\overline{ج_{1}}$ = ج$_{2}$ $\overline{ج_{2}}$ = ج$_{3}$ $\overline{ج_{3}}$ = ١ (١)

، ∵ | $\frac{ج_{1}}{ج_{2}}$ + $\frac{ج_{2}}{ج_{3}}$ + $\frac{ج_{3}}{ج_{1}}$ | = ١ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢)

∴ | $\frac{ج_{1} \overline{ج_{2}}}{ج_{2} \overline{ج_{2}}}$ + $\frac{ج_{2} \overline{ج_{3}}}{ج_{3} \overline{ج_{3}}}$ + $\frac{ج_{3} \overline{ج_{1}}}{ج_{1} \overline{ج_{1}}}$ | = ١

∴ | ج$_{1}$ $\overline{ج_{2}}$ + ج$_{2}$ $\overline{ج_{3}}$ + ج$_{3}$ $\overline{ج_{1}}$ | = ١

∴ | ج$_{1}$ ج$_{2}$ + ج$_{2}$ ج$_{3}$ + ج$_{3}$ ج$_{1}$ | = ١

② ∵ | ج | = | ات ج$_{1}$ |

، ج ج$_{1}$ صورة ج بدوران

حول (د) بزاوية (٩٠°)

∴ (ج ج$_{1}$) تمثل بالقطعة حـ

حيث وحـ قطر فى المربع و ا حـ

∴ مساحة Δ ا ب حـ = $\frac{1}{٢}$ | ج | × | ج$_{1}$ |

= $\frac{1}{٢}$ | ج$_{1}$ |^{٢}

٤٦

الطرف الأيمن = $\left[\frac{ما \frac{θ}{٢} − ت ما \frac{θ}{٢}}{ما \frac{θ}{٢} + ت ما \frac{θ}{٢}}\right]^{ن}$

= $\left[\frac{ما \frac{θ}{٢} + ت ما \frac{θ}{٢}}{ما (\frac{π}{٢} − \frac{θ}{٢}) + ت ما (\frac{π}{٢} − \frac{θ}{٢})}\right]^{ن}$

= (ما (\frac{π}{٢} − θ) + ت ما (\frac{π}{٢} − θ))^{ن}

= ما ن (\frac{π}{٢} − θ) + ت ما ن (\frac{π}{٢} − θ) = الطرف الأيسر

٤٧

∵ (ما س + ت ما س)^{٥} = (ما ٥س + ت ما ٥س)

∴ ما ٥س + ت ما ٥س = ما^{٥} س

+ ^{٥}م$_{١}$ ما^{٤} س (ت ما س) + ^{٥}م$_{٢}$ ما^{٣} س (ت ما س)^{٢}

+ ^{٥}م$_{٣}$ ما^{٢} س (ت ما س)^{٣} + ^{٥}م$_{٤}$ ما س (ت ما س)^{٤}

+ (ت ما س)^{٥}

= ما^{٥} س + ت (٥ ما^{٤} س ما س) − ١٠ ما^{٣} س ما^{٢} س

− ت (١٠ ما^{٣} س ما^{٢} س) + ٥ ما س ما^{٢} س + ت ما^{٥} س

بمقارنة الجزء التخيلى

∴ ما ٥س = ٥ ما^{٤} س ما س

− ١٠ ما^{٣} س ما^{٢} س + ما^{٥} س

∴ $\frac{ما ٥س}{ما س}$ = ٥ ما^{٤} س − ١٠ ما^{٢} س

(١ − ما^{٢} س) + ما^{٤} س

= ٥ ما^{٤} س − ١٠ ما^{٢} س

+ ١٠ ما^{٤} س + (١ − ما^{٢} س)^{٢}

= ٥ ما^{٤} س − ١٠ ما^{٢} س + ١٠ ما^{٤} س

+ ١ − ٢ ما^{٢} س + ما^{٤} س

= ١٦ ما^{٤} س − ١٢ ما^{٢} س + ١

٤٨

ج$_{1}$ = ٤ (ما ٢θ + ت ما ٢θ)

، ج$_{2}$ = ٣ (ما θ − ت ما θ)

∴ ج$_{1}$ ج$_{2}$ = ١٢ (ما ٢θ ما θ + ت ما ٢θ ما θ)

= ١٢ (ما ٣θ + ما θ + ت ما ٣θ − ت ما θ)

∴ ج$_{1}$ ج$_{2}$ = ١٢ (ما ٣θ + ما θ) + ١٢ ت (ما ٣θ − ما θ)

∴ $\frac{ج_{1}}{ج_{2}}$ = $\frac{١٢ (ما ٣θ + ما θ) + ١٢ ت (ما ٣θ − ما θ)}{ج_{2} ج_{2}}$

∴ $\frac{ج_{1}}{ج_{2}}$ = $\frac{١٢ (ما ٣θ + ما θ) + ١٢ ت (ما ٣θ − ما θ)}{٩ ج_{2}^{٢}}$

∴ $\frac{ج_{1}}{ج_{2}}$ = $\frac{٤}{٣}$ (ما ٣θ + ما θ) + $\frac{٤}{٣}$ ت (ما ٣θ − ما θ)

٤٩

∵ ج$_{1}$ = ٤ (ما ٢θ + ت ما ٢θ)

، ج$_{2}$ = ٣ (ما θ − ت ما θ)

∴ ج$_{1}$ ج$_{2}$ = ١٢ (ما ٢θ ما θ + ت ما ٢θ ما θ)

= ١٢ (ما ٣θ + ما θ + ت ما ٣θ − ت ما θ)

∴ ج$_{1}$ ج$_{2}$ = ١٢ (ما ٣θ + ما θ) + ١٢ ت (ما ٣θ − ما θ)

∴ $\frac{ج_{1}}{ج_{2}}$ = $\frac{١٢ (ما ٣θ + ما θ) + ١٢ ت (ما ٣θ − ما θ)}{ج_{2} ج_{2}}$

∴ $\frac{ج_{1}}{ج_{2}}$ = $\frac{١٢ (ما ٣θ + ما θ) + ١٢ ت (ما ٣θ − ما θ)}{٩ ج_{2}^{٢}}$

∴ $\frac{ج_{1}}{ج_{2}}$ = $\frac{٤}{٣}$ (ما ٣θ + ما θ) + $\frac{٤}{٣}$ ت (ما ٣θ − ما θ)

٥٠

بوضع ى = $\frac{π}{٢}$ − ٢θ

∴ الطرف الأيمن

= $\left(\frac{١ + ما ٥θ − ت ما ٥θ}{١ + ما ٥θ + ت ما ٥θ}\right)^{ن}$

= $\left(\frac{١ + ما (٥π − ٥θ) − ت ما (٥π − ٥θ)}{١ + ما (٥π − ٥θ) + ت ما (٥π − ٥θ)}\right)^{ن}$

= $\left(\frac{١ + ما ٢θ − ت ما ٢θ}{١ + ما ٢θ + ت ما ٢θ}\right)^{ن}$

= $\left(\frac{٢ ما^{٢} θ − ٢ ت ما θ ما θ}{٢ ما^{٢} θ + ٢ ت ما θ ما θ}\right)^{ن}$

= $\left(\frac{ما θ (ما θ − ت ما θ)}{ما θ (ما θ + ت ما θ)}\right)^{ن}$

= $\left(\frac{ما θ + ت ما θ}{ما (−θ) + ت ما (−θ)}\right)^{ن}$

= (ما ٢θ + ت ما ٢θ)^{ن}

لكن ٢θ = $\frac{π}{٢}$ − ى

= (ما ($\frac{π}{٢}$ − ى) + ت ما ($\frac{π}{٢}$ − ى))^{ن}

= ما ن ($\frac{π}{٢}$ − ى) + ت ما ن ($\frac{π}{٢}$ − ى)

حل آخر :

الطرف الأيمن

= $\left[\frac{ما ى − ت ما^{٢} ى + ما ى + ت ما ى ما ى}{١ + ما ى − ت ما ى}\right]^{ن}$

= $\left[\frac{(ما ى + ت ما ى) + (ما ى + ت ما ى ما ى)}{١ + ما ى − ت ما ى}\right]^{ن}$

= $\left[\frac{(ما ى + ت ما ى)(١ + ما ى − ت ما ى)}{(١ + ما ى − ت ما ى)}\right]^{ن}$

= [ما ($\frac{π}{٢}$ − ى) + ت ما ($\frac{π}{٢}$ − ى)]^{ن}

= ما ن ($\frac{π}{٢}$ − ى) + ت ما ن ($\frac{π}{٢}$ − ى)

٥١

الطرف الأيمن = ت [(١ − ت)^{ن} − (١ + ت)^{ن}]

= ت [($\sqrt{٢}$ (ما $\frac{-π}{٤}$ + ت ما $\frac{-π}{٤}$))^{ن}

− ($\sqrt{٢}$ (ما $\frac{π}{٤}$ + ت ما $\frac{π}{٤}$))^{ن}]

= ت $\sqrt{٢}^{ن}$ [(ما $\frac{-ن π}{٤}$ + ت ما $\frac{-ن π}{٤}$)

− (ما $\frac{ن π}{٤}$ + ت ما $\frac{ن π}{٤}$)]

= ت × ٢ ت $\sqrt{٢}^{ن}$ [−٢ ت ما $\frac{ن π}{٤}$]

= ٢ $\sqrt{٢}^{ن}$ ما $\frac{ن π}{٤}$

= ٢ $\sqrt{٢}^{ن}$ ما $\frac{ن π}{٤}$

٥٢

نفرض أن ج$_{1}$ = ٢ + ب ت ، ج$_{2}$ = حـ + ء ت

∴ ج$_{1}$ + ج$_{2}$ = (٢ + حـ) + (ب + ء) ت

∴ | ج$_{1}$ + ج$_{2}$ | = $\sqrt{(٢ + حـ)^{٢} + (ب + ء)^{٢}}$

= $\sqrt{٤ + ٤ حـ + حـ^{٢} + ب^{٢} + ٢ ب ء + ء^{٢}}$

، ج$_{1}$ − ج$_{2}$ = (٢ − حـ) + (ب − ء) ت

∴ | ج$_{1}$ − ج$_{2}$ | = $\sqrt{(٢ − حـ)^{٢} + (ب − ء)^{٢}}$

= $\sqrt{٤ − ٤ حـ + حـ^{٢} + ب^{٢} − ٢ ب ء + ء^{٢}}$

∴ الطرف الأيمن =

| ج$_{1}$ + ج$_{2}$ |^{٢} + | ج$_{1}$ − ج$_{2}$ |^{٢} = ٤ + ٤ حـ + حـ^{٢}

+ ب^{٢} + ٢ ب ء + ء^{٢} + ٤ − ٤ حـ + حـ^{٢} + ب^{٢} − ٢ ب ء + ء^{٢}

= ٢ (٤ + حـ^{٢} + ب^{٢} + ء^{٢})

، الطرف الأيسر = ٢ (| ج$_{1}$ |^{٢} + | ج$_{2}$ |^{٢})

= ٢ (٤ + حـ^{٢} + ب^{٢} + ء^{٢})

٥٣

① من الرسم نجد أن

(ج$_{1}$ ، ج$_{2}$)

تمثل بالقطعة

ا حيث و ا قطر

فى المربع

∵ طول القطر = طول الضلع × $\sqrt{٢}$

∴ | ج$_{1}$ − ج$_{2}$ | = | ج$_{1}$ | × $\sqrt{٢}$ = $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ = ٢

② ∵ (٢ $\sqrt{٢}$ − ت)^{ن} = ٢^{ن} (١ − ت ن) (١)

∴ (٢ $\sqrt{٢}$ + ت)^{ن} = ٢^{ن} (١ + ت ن) (٢)

بضرب المعادلتين (١) ، (٢)

∴ [(٢ $\sqrt{٢}$ + ت) (٢ $\sqrt{٢}$ − ت)]^{ن}

= ٢^{٢ن} (١ + ت ن) (١ − ت ن)

(٨ + ١)^{ن} = ٢^{٢ن} (١^{٢} + ب^{٢})

∴ ٩^{ن} = ٢^{٢ن} (١^{٢} + ب^{٢})

∴ ١^{٢} + ب^{٢} = ٩^{ن} ÷ ٢^{٢ن} = ٩

③ من الرسم نجد أن

طول القطر الواصل

بين ج$_{1}$ ، ج$_{2}$

يمثل | ج$_{1}$ − ج$_{2}$ |

وباستخدام فيثاغورس

نجد أن

| ج$_{1}$ − ج$_{2}$ | = $\sqrt{(\sqrt{٢} \sqrt{٢})^{٢} + (١)^{٢}}$ = ٨

④ نفرض أن ج = س + ت ص

∵ | ج − ٤ | < | ج − ٢ |

∴ | (س − ١) + ت ص | < | (س − ٢) + ت ص |

∴ $\sqrt{(س − ١)^{٢} + ص^{٢}}$ < $\sqrt{(س − ٢)^{٢} + ص^{٢}}$

∴ (س − ١)^{٢} < (س − ٢)^{٢}

∴ س^{٢} − ٨ س + ١٦ < س^{٢} − ٤ س + ٤

∴ ٤ < ١٢ س ∴ س > $\frac{١}{٣}$

∴ س يمكن أن تساوى ١

⑤ ∵ ج$_{ن}$ = ما $\frac{ن π}{٤}$ + ت ما $\frac{ن π}{٤}$

، ج$_{١}$ = ما $\frac{π}{٤}$ + ت ما $\frac{π}{٤}$

، ج$_{٢}$ = ما $\frac{٢π}{٤}$ + ت ما $\frac{٢π}{٤}$

، ... وهكذا

∴ ج$_{١}$ + ج$_{٢}$ + ج$_{٣}$ + ... إلى ∞

= (ما $\frac{π}{٤}$ + ت ما $\frac{π}{٤}$) (ما $\frac{π}{٤}$ + ت ما $\frac{π}{٤}$) (

ما $\frac{π}{٤}$ + ت ما $\frac{π}{٤}$) إلى ∞

ما ($\frac{π}{٤}$ + $\frac{π}{٤}$ + $\frac{π}{٨}$ + ...)

+ ت ما ($\frac{π}{٤}$ + $\frac{π}{٤}$ + $\frac{π}{٨}$ + ...)

= ما ($\frac{\frac{π}{٤}}{١ − \frac{١}{٢}}$) + ت ما ($\frac{\frac{π}{٤}}{١ − \frac{١}{٢}}$)

باستخدام مجموع المتتابعة الهندسية

= ما ($\frac{π}{٢}$) + ت ما ($\frac{π}{٢}$) = ت

اختبارات تعاونية 7

١

① J = ٢ ، θ = $\frac{π}{٣}$ ∴ ٢ت ق = ٢ ت $\frac{π}{٣}$

② J = ٧ ، θ = ... ∴ ٧ ق$_{س}$

③ J = $\sqrt{(\sqrt{٢})^{٢} + (-\sqrt{٢})^{٢}}$ = ٢

∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الرابع

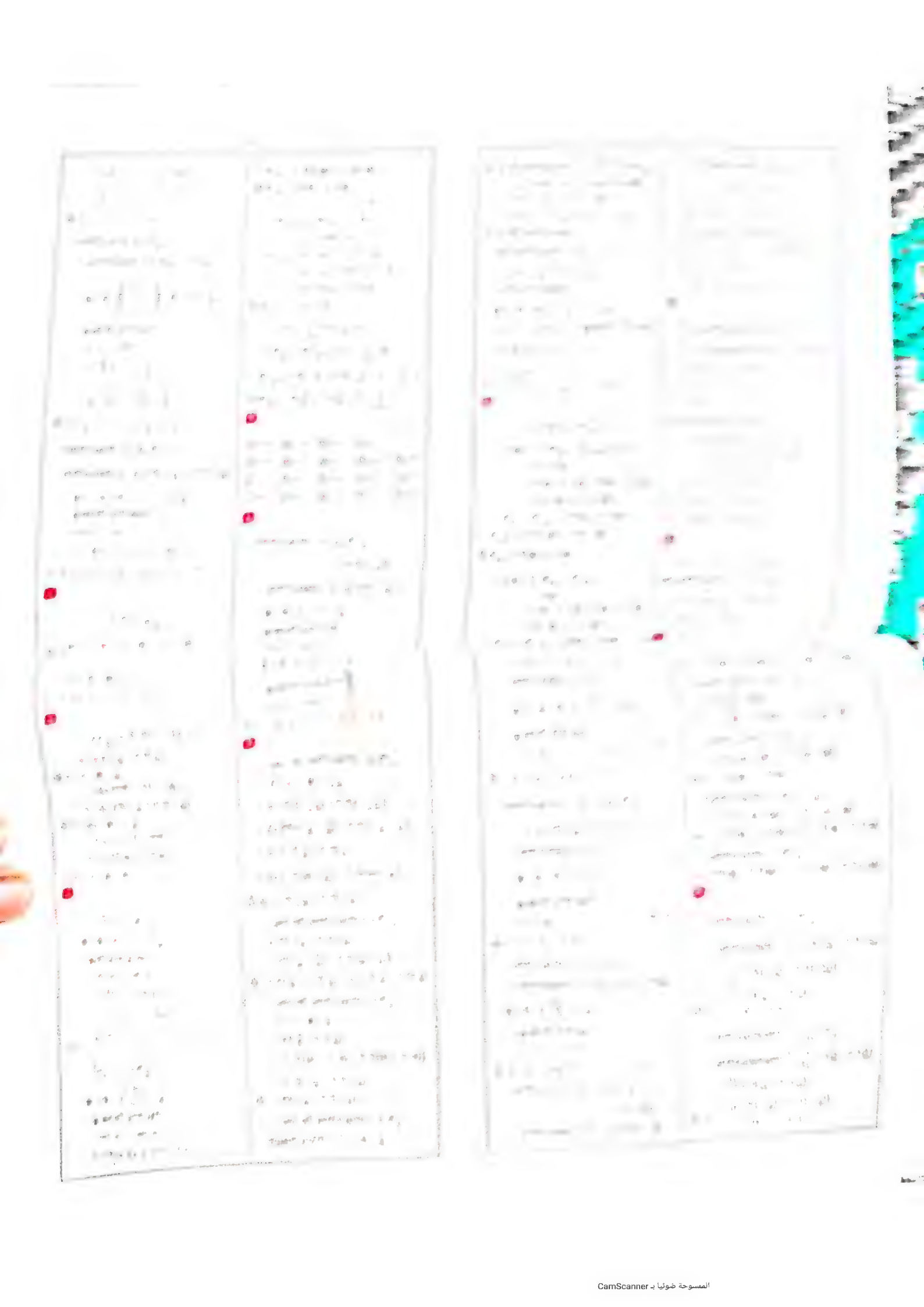
∴ θ = ط$^{-1}$ $\frac{-\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ ∴ θ = $\frac{-π}{٤}$

∴ ٢ $\sqrt{٢}$ ق$_{س}$ ... ت

∴ ... ق$_{س}$ ... ت

∴ ... ق$_{س}$ ... ت

∴ ... ق$_{س}$ ... ت



$\therefore z_0 = 8\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

④ $z_1 + 8 = 0$

$z_1 = -8$

$\therefore z^4 = 8\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$\therefore z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{11\pi}{16} + i\sin\frac{11\pi}{16})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{19\pi}{16} + i\sin\frac{19\pi}{16})$

$k = 3$ عندما

$\therefore z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{27\pi}{16} + i\sin\frac{27\pi}{16})$

$k = 4, 5, 6, 7$ عندما $\ldots$

$\therefore z_1 = \{\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}), \sqrt{2}\,(\cos\frac{11\pi}{16} + i\sin\frac{11\pi}{16}), \sqrt{2}\,(\cos\frac{19\pi}{16} + i\sin\frac{19\pi}{16}), \sqrt{2}\,(\cos\frac{27\pi}{16} + i\sin\frac{27\pi}{16})\}$

③ $z_1 + 16i = 0$

$z_1 = -16i$

$\therefore z^4 = 16\,(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

$\therefore z = 2\,(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = 2\,(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = 2\,(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8})$

$k = 3$ عندما

$\therefore z = 2\,(\cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8})$

$k = 4, 5, 6, 7$ عندما $\ldots$

$\therefore z_1 = \{2\,(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}), 2\,(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}), 2\,(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}), 2\,(\cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8})\}$

② $z_1 + 4 = 0$

$z_1 = -4$

$\therefore z^3 = 4\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$\therefore z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9})$

$k = 3, 4, 5, \ldots$ عندما

$\therefore z_1 = \{\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}), \sqrt{2}\,(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}), \sqrt{2}\,(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9})\}$

① $z_1 + 1 = 0$

$z_1 = -1$

$\therefore z^3 = 1\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

$k = 2, 3, 4, \ldots$ عندما

$\therefore z_1 = \{1\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}), 1\,(\cos\pi + i\sin\pi), 1\,(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})\}$

$\therefore z_0 = 16\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

④ $z_1 + 16 = 0$

$z_1 = -16$

$\therefore z^4 = 16\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

$\therefore z = 2\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = 2\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = 2\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

$k = 3$ عندما

$\therefore z = 2\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

$k = 4, 5, 6, 7$ عندما $\ldots$

$\therefore z_1 = \{2\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), 2\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}), 2\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}), 2\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})\}$

③ $z_1 + 81 = 0$

$z_1 = -81$

$\therefore z^4 = 81\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

$\therefore z = 3\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = 3\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = 3\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

$k = 3$ عندما

$\therefore z = 3\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

$k = 4, 5, 6, 7$ عندما $\ldots$

$\therefore z_1 = \{3\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), 3\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}), 3\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}), 3\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})\}$

② $z_1 + 4i = 0$

$z_1 = -4i$

$\therefore z^3 = 4\,(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

$\therefore z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$

$k = 3, 4, 5, \ldots$ عندما

$\therefore z_1 = \{\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}), \sqrt{2}\,(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}), \sqrt{2}\,(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})\}$

① $z_1 + 1 = 0$

$z_1 = -1$

$\therefore z^3 = 1\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

$k = 2, 3, 4, \ldots$ عندما

$\therefore z_1 = \{1\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}), 1\,(\cos\pi + i\sin\pi), 1\,(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})\}$

$\therefore z_0 = 1\,(\cos 0 + i\sin 0)$

④ $z_1 + 1 = 0$

$z_1 = -1$

$\therefore z^4 = 1\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

$k = 3$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

$k = 4, 5, 6, 7$ عندما $\ldots$

$\therefore z_1 = \{1\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), 1\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}), 1\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}), 1\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})\}$

③ $z_1 + 1 = 0$

$z_1 = -1$

$\therefore z^4 = 1\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

$k = 3$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

$k = 4, 5, 6, 7$ عندما $\ldots$

$\therefore z_1 = \{1\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), 1\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}), 1\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}), 1\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})\}$

② $z_1 + 8i = 0$

$z_1 = -8i$

$\therefore z^3 = 8\,(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

$\therefore z = 2\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = 2\,(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = 2\,(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$

$k = 3, 4, 5, \ldots$ عندما

$\therefore z_1 = \{2\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}), 2\,(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}), 2\,(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})\}$

① $z_1 = 1 + 0i$

$\therefore z^3 = 1\,(\cos 0 + i\sin 0)$

$\therefore z = 1\,(\cos 0 + i\sin 0)$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$

$k = 3, 4, 5, \ldots$ عندما

$\therefore z_1 = \{1\,(\cos 0 + i\sin 0), 1\,(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}), 1\,(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})\}$

$\therefore z_0 = 1\,(\cos 0 + i\sin 0)$

④ $z_1 + 1 = 0$

$z_1 = -1$

$\therefore z^4 = 1\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

$k = 3$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

$k = 4, 5, 6, 7$ عندما $\ldots$

$\therefore z_1 = \{1\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), 1\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}), 1\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}), 1\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})\}$

③ $z_1 + 1 = 0$

$z_1 = -1$

$\therefore z^4 = 1\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

$k = 3$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

$k = 4, 5, 6, 7$ عندما $\ldots$

$\therefore z_1 = \{1\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), 1\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}), 1\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}), 1\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})\}$

② $z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$\therefore z^3 = 4\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

$\therefore z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{21\pi}{12} + i\sin\frac{21\pi}{12})$

$k = 3, 4, 5, \ldots$ عندما

$\therefore z_1 = \{\sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}), \sqrt{2}\,(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}), \sqrt{2}\,(\cos\frac{21\pi}{12} + i\sin\frac{21\pi}{12})\}$

① $z_1 = 1 + 0i$

$\therefore z^3 = 1\,(\cos 0 + i\sin 0)$

$\therefore z = 1\,(\cos 0 + i\sin 0)$

$k = 1$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

$k = 2$ عندما

$\therefore z = 1\,(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$

$k = 3, 4, 5, \ldots$ عندما

$\therefore z_1 = \{1\,(\cos 0 + i\sin 0), 1\,(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}), 1\,(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})\}$

إجابات تمارين

$\therefore (\frac{z_1}{z_2})^4 = [\sqrt{2}\,(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)]^4$

$= [\sqrt{2}\,(\cos\theta + i\sin\theta)]^4$

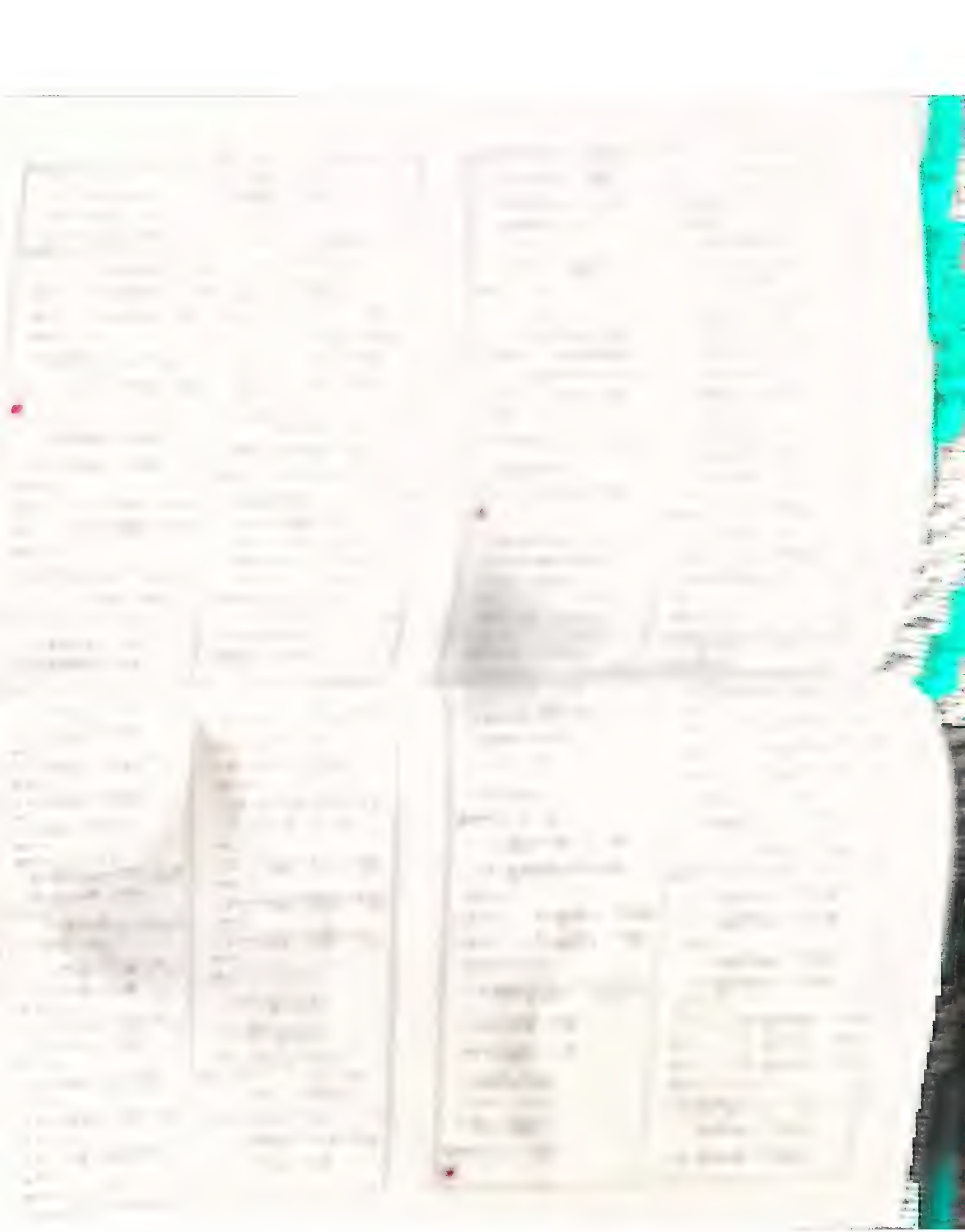
$\therefore z_1 = \sqrt{2}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\therefore z_2 = \sqrt{2}\,(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$

$\therefore \theta = 15^\circ$

$= \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$



∴ س$^{-2}$ − $\frac{1}{س^2}$ = ٢ ت ظا^{2}θ (١)

وفى حالة س = جتاθ − ت جاθ = جتا − θ + ت جا − θ

∴ س$^{-2}$ = جتا − ٢θ + ت جا − ٢θ

= جتا٢θ − ت جا٢θ

، $\frac{1}{س^2}$ = جتا٢θ + ت جا٢θ

∴ س$^{-2}$ − $\frac{1}{س^2}$ = − ٢ ت جا٢θ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ س$^{-2}$ − $\frac{1}{س^2}$ = ± ٢ ت جا٢θ

٣٧

ع$_1$ = ٤ (جتا٢θ + ت جا٢θ)

، ع$_2$ = ١٣ (جتاθ − ت جاθ)

= ١٣ (جتا − θ + ت جا − θ)

∴ ع$_1$ ع$_2$ = ٤ × ١٣ (جتا٢θ − θ) + ت جا٢θ − θ))

= ٥٢ (جتاθ + ت جاθ) (الصورة المثلثية)

= ٥٢ جتاθ + ٥٢ ت جاθ

= ٥٢ × $\frac{١٢}{١٣}$ + ٥٢ ت × $\frac{٥}{١٣}$

= ٤٨ + ٢٠ ت

(الصورة الجبرية)

، ع$_1^2$ ع$_2^2$ = [١٣ (جتا − θ + ت جا − θ)]^2

= ١٦٩ (جتا − ٢θ + ت جا − ٢θ) (الصورة المثلثية)

= ١٦٩ جتا − ٢θ + ١٦٩ ت جا − ٢θ

= ١٦٩ (٢ جتا^{2}θ − ١) − ١٦٩ ت (٢ جاθ جتاθ)

= ١٦٩ × $\frac{١١٩}{١٦٩}$ − ١٦٩ ت × $\frac{١٢٠}{١٦٩}$

= ١١٩ − ١٢٠ ت (الصورة الجبرية)

٣٨

ع = ٥ (جتاθ + ت جاθ)

∴ ع$^{-1}$

= (٥ (جتاθ + ت جاθ))$^{-1}$

= $\frac{1}{5}$ (جتا − θ + ت جا − θ) (الصورة المثلثية)

= $\frac{1}{5}$ جتا − θ + $\frac{1}{5}$ ت جا − θ

= $\frac{1}{5}$ جتاθ − $\frac{1}{5}$ ت جاθ = $\frac{٣}{٥}$ + $\frac{4}{٥}$ ت

(الصورة الجبرية)

، ع^2 = (ع$^{-1}$)^2 = $\frac{1}{25}$ (جتا − ٢θ + ت جا − ٢θ)

= $\frac{1}{25}$ ((٢ جتا^{2}θ − ١) − ت (٢ جاθ جتاθ))

= $\frac{-٧}{١٢٥}$ + $\frac{٢٤}{١٢٥}$ ت

حل آخر : (ع$^{-1}$)^2 = (ع^2)$^{-1}$ = $\frac{-٧}{١٢٥}$ − $\frac{٢٤}{١٢٥}$ ت

٣٩

الطرف الأيمن = $\left[\frac{\text{جتا}\frac{\theta}{2} - \text{ت جا}\frac{\theta}{2}}{\text{جا}\frac{\theta}{2} - \text{ت جتا}\frac{\theta}{2}}\right]^{ن}$

= $\left[\frac{\text{جتا}\frac{\theta}{2} + \text{ت جا}\frac{\theta}{2}}{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}\right]^{ن}$

= $\left[\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]^{ن}$

= الطرف الأيسر

٤٠

(١ + ت)^{ن} = [$\sqrt{2}$ (جتا $\frac{\pi}{4}$ + ت جا $\frac{\pi}{4}$)]^{ن}

= $\sqrt{2}^{ن}$ (جتا $\frac{ن\pi}{4}$ + ت جا $\frac{ن\pi}{4}$) المصورة المثلثية.

= $\sqrt{2}^{ن}$ جتا $\frac{ن\pi}{4}$ + ت ($\sqrt{2}^{ن}$ جا $\frac{ن\pi}{4}$) الصورة الجبرية

∴ ا = $\sqrt{2}^{ن}$ جتا $\frac{ن\pi}{4}$ ، ب = $\sqrt{2}^{ن}$ جا $\frac{ن\pi}{4}$

٤١

① ∵ ا ع$_1$ ا = ا ع$_2$ ا = ا ع$_3$ ا = ١

∴ ا ع$_1$ ا^2 = ا ع$_2$ ا^2 = ا ع$_3$ ا^2 = ١

∴ ع$_1$ ع$_1$ = ع$_2$ ع$_2$ = ع$_3$ ع$_3$ = ١ (١)

، ∵ ا $\frac{ع_1}{ع_2}$ + $\frac{ع_2}{ع_3}$ + $\frac{ع_3}{ع_1}$ ا = ١ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢)

∴ ا $\frac{ع_1 ع_1}{ع_2 ع_3}$ + $\frac{ع_2 ع_2}{ع_3 ع_1}$ + $\frac{ع_3 ع_3}{ع_1 ع_2}$ ا = ١

∴ ا ع$_1^2$ + ع$_2^2$ + ع$_3^2$ ا = ١

∴ ا ع$_1^2$ + ع$_2^2$ + ع$_3^2$ ا = ١

② ∵ ا ع$_1$ ا = ١ ، ع$_1$ = ١ + ت

، ع$_2$ = ع$_1$ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°)

= (١ + ت) ت = − ١ + ت

، ع$_3$ = ع$_2$ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°)

= (− ١ + ت) ت = − ت − ١

∴ ع$_1$ + ع$_2$ + ع$_3$ = ١ + ت − ١ + ت − ت − ١ = − ١ + ت

∴ ا ع$_1$ + ع$_2$ + ع$_3$ ا = $\sqrt{2}$

، ∵ ا ع$_1$ ا = ا ع$_2$ ا = ا ع$_3$ ا = ١

∴ ع$_1$ ، ع$_2$ ، ع$_3$ تقع على دائرة مركزها (٠ ، ٠) ونصف قطرها ١

∴ ع$_1$ ع$_2$ = ع$_2$ ع$_3$ = ع$_3$ ع$_1$ = ١ − ٠ + ٠ ت = ١

∴ ع$_1$ ، ع$_2$ ، ع$_3$ تقع على رءوس مثلث متساوى الأضلاع

٤٢

∵ س + ت ص = (١ + ت)^{ن}

∴ | س + ت ص | = | (١ + ت)^{ن} |

∴ $\sqrt{س^2 + ص^2}$ = $\sqrt{2}^{ن}$ بالتربيع

∴ س^2 + ص^2 = ($\sqrt{2}^{ن}$)^2 = ٢^{ن}

حل آخر : ∵ س + ت ص = (١ + ت)^{ن} (١)

∴ س − ت ص = (١ + ت)^{ن}

∴ س − ت ص = (١ − ت)^{ن} (٢)

بضرب (١) × (٢)

∴ س^2 + ص^2 = [(١ + ت) (١ − ت)]^{ن}

∴ س^2 + ص^2 = (١^2 + ١^2)^{ن}

٤٣

∵ (جتاس + ت جاس)^5 = (جتا٥س + ت جا٥س)

∴ جتا٥س + ت جا٥س = جتا^{5}س + ٥ ت جتا^{4}س جاس + ١٠ ت^2 جتا^{3}س جا^{2}س + ١٠ ت^3 جتا^{2}س جا^{3}س + ٥ ت^4 جتاس جا^{4}س + ت^5 جا^{5}س

= جتا^{5}س + ١٠ ت^2 جتا^{3}س جا^{2}س + ٥ جتاس جا^{4}س + ت (١٠ جتا^{3}س جا^{2}س + جا^{5}س)

بمقارنة الجزء التخيلى

∴ جا٥س = ٥ جتاس جا^{4}س − ١٠ جتا^{3}س جا^{2}س + جا^{5}س

= ٥ جتاس (١ − جا^{2}س)^2 − ١٠ (١ − جا^{2}س) جا^{2}س + جا^{5}س

= ٥ جتاس − ١٠ جا^{2}س + ١٠ جا^{4}س + ٥ جتاس جا^{4}س − ١٠ جا^{2}س + ١٠ جا^{4}س + جا^{5}س

= ١٦ جا^{5}س − ٢٠ جا^{3}س + ٥ جتاس جا^{4}س + ٥ جتاس جا^{4}س

= ١٦ جا^{5}س − ٢٠ جا^{3}س + ١٠ جتاس جا^{4}س

٣٤

نفرض أن : ع$_1$ = ٢ + ت ، ع$_2$ = حـ + ء ت

∴ ع$_1$ + ع$_2$ = (٢ + حـ) + (ب + ء) ت

∴ | ع$_1$ + ع$_2$ | = $\sqrt{(٢ + حـ)^2 + (ب + ء)^2}$

= $\sqrt{٤ + ٤ حـ + حـ^2 + ب^2 + ٢ ب ء + ء^2}$

، ع$_1$ − ع$_2$ = (٢ − حـ) + (ب − ء) ت

∴ | ع$_1$ − ع$_2$ | = $\sqrt{(٢ - حـ)^2 + (ب - ء)^2}$

= $\sqrt{٤ - ٤ حـ + حـ^2 + ب^2 - ٢ ب ء + ء^2}$

∴ الطرف الأيمن =

| ع$_1$ + ع$_2$ |^2 + | ع$_1$ − ع$_2$ |^2 = ٢^2 + ٢ حـ + حـ^2 + ب^2 + ٢ ب ء + ء^2 + ٢^2 − ٢ حـ + حـ^2 + ب^2 − ٢ ب ء + ء^2

= ٢ (٢^2 + حـ^2 + ب^2 + ء^2)

، الطرف الأيسر = ٢ (| ع$_1$ |^2 + | ع$_2$ |^2)

= ٢ (٢^2 + حـ^2 + ب^2 + ء^2)

٣٥

بوضع ى = $\frac{\pi}{2}$ − ٢θ

∴ الطرف الأيمن

= $\left(\frac{١ + \text{جتا}(٩٠° - ٢\theta) + \text{ت جا}(٩٠° - ٢\theta)}{١ + \text{جتا}(٩٠° - ٢\theta) + \text{ت جا}(٩٠° - ٢\theta)}\right)^{ن}$

= $\left(\frac{١ + \text{جتا}٢\theta + \text{ت جا}٢\theta}{١ + \text{جتا}٢\theta - \text{ت جا}٢\theta}\right)^{ن}$

= $\left(\frac{٢ \text{جتا}^2\theta + ٢ \text{ت جاθ جتاθ}}{٢ \text{جا}^2\theta - ٢ \text{ت جاθ جتاθ}}\right)^{ن}$

= $\left(\frac{٢ \text{جتاθ} (\text{جتاθ} + \text{ت جاθ})}{٢ \text{جاθ} (\text{جاθ} - \text{ت جتاθ})}\right)^{ن}$

= $\left(\frac{\text{جتاθ} + \text{ت جاθ}}{\text{جتا}(-\theta) + \text{ت جا}(-\theta)}\right)^{ن}$

= (جتا٢θ + ت جا٢θ)^{ن}

لكن ٢θ = $\frac{\pi}{2}$ − ى

= (جتا ($\frac{\pi}{2}$ − ى) + ت جا ($\frac{\pi}{2}$ − ى))^{ن}

= جتا^{ن} ($\frac{\pi}{2}$ − ى) + ت جا^{ن} ($\frac{\pi}{2}$ − ى)

حل آخر :

الطرف الأيمن

= $\left[\frac{\text{جا}^2\text{ى} - \text{ت جا}^2\text{ى} + \text{جاى جتاى} + \text{ت جاى جتاى}}{١ + \text{جاى جتاى} - \text{ت جاى جتاى}}\right]^{ن}$

= $\left[\frac{(\text{جاى} + \text{ت جتاى})(\text{جاى} + \text{ت جتاى}) + (\text{جاى} + \text{ت جتاى})}{١ + \text{جاى جتاى} - \text{ت جاى جتاى}}\right]^{ن}$

= $\left[\frac{(\text{جاى} + \text{ت جتاى})(١ + \text{جاى} - \text{ت جتاى})}{(١ + \text{جاى} - \text{ت جتاى})}\right]^{ن}$

= [جا ($\frac{\pi}{2}$ − ى) + ت جا ($\frac{\pi}{2}$ − ى)]^{ن}

= جا^{ن} ($\frac{\pi}{2}$ − ى) + ت جا^{ن} ($\frac{\pi}{2}$ − ى)

٣٦

الطرف الأيمن = $\left[\frac{\text{جتا}\frac{\theta}{2} - \text{ت جا}\frac{\theta}{2}}{\text{جا}\frac{\theta}{2} - \text{ت جتا}\frac{\theta}{2}}\right]^{ن}$

= $\left[\frac{\text{جتا}\frac{\theta}{2} + \text{ت جا}\frac{\theta}{2}}{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}\right]^{ن}$

= $\left[\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]^{ن}$

= جتا^{ن} ($\frac{\pi}{2}$ − θ) + ت جا^{ن} ($\frac{\pi}{2}$ − θ)

= جتا ($\frac{ن\pi}{2}$ − ن θ) + ت جا ($\frac{ن\pi}{2}$ − ن θ)

= جتا ن θ + ت جا ن θ

= الطرف الأيسر

٣٧

ع$_1$ = ٤ (جتا٢θ + ت جا٢θ)

، ع$_2$ = ١٣ (جتاθ − ت جاθ)

= ١٣ (جتا − θ + ت جا − θ)

∴ ع$_1$ ع$_2$ = ٤ × ١٣ (جتا٢θ − θ) + ت جا٢θ − θ))

= ٥٢ (جتاθ + ت جاθ) (الصورة المثلثية)

= ٥٢ جتاθ + ٥٢ ت جاθ

= ٥٢ × $\frac{١٢}{١٣}$ + ٥٢ ت × $\frac{٥}{١٣}$

= ٤٨ + ٢٠ ت

(الصورة الجبرية)

، ع$_1^2$ ع$_2^2$ = [١٣ (جتا − θ + ت جا − θ)]^2

= ١٦٩ (جتا − ٢θ + ت جا − ٢θ) (الصورة المثلثية)

= ١٦٩ جتا − ٢θ + ١٦٩ ت جا − ٢θ

= ١٦٩ (٢ جتا^{2}θ − ١) − ١٦٩ ت (٢ جاθ جتاθ)

= ١٦٩ × $\frac{١١٩}{١٦٩}$ − ١٦٩ ت × $\frac{١٢٠}{١٦٩}$

= ١١٩ − ١٢٠ ت (الصورة الجبرية)

٣٨

ع = ٥ (جتاθ + ت جاθ)

∴ ع$^{-1}$

= (٥ (جتاθ + ت جاθ))$^{-1}$

= $\frac{1}{5}$ (جتا − θ + ت جا − θ) (الصورة المثلثية)

= $\frac{1}{5}$ جتا − θ + $\frac{1}{5}$ ت جا − θ

= $\frac{1}{5}$ جتاθ − $\frac{1}{5}$ ت جاθ = $\frac{٣}{٥}$ + $\frac{4}{٥}$ ت

(الصورة الجبرية)

، ع^2 = (ع$^{-1}$)^2 = $\frac{1}{25}$ (جتا − ٢θ + ت جا − ٢θ)

= $\frac{1}{25}$ ((٢ جتا^{2}θ − ١) − ت (٢ جاθ جتاθ))

= $\frac{-٧}{١٢٥}$ + $\frac{٢٤}{١٢٥}$ ت

حل آخر : (ع$^{-1}$)^2 = (ع^2)$^{-1}$ = $\frac{-٧}{١٢٥}$ − $\frac{٢٤}{١٢٥}$ ت

٣٩

الطرف الأيمن = $\left[\frac{\text{جتا}\frac{\theta}{2} - \text{ت جا}\frac{\theta}{2}}{\text{جا}\frac{\theta}{2} - \text{ت جتا}\frac{\theta}{2}}\right]^{ن}$

= $\left[\frac{\text{جتا}\frac{\theta}{2} + \text{ت جا}\frac{\theta}{2}}{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}\right]^{ن}$

= $\left[\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]^{ن}$

= الطرف الأيسر

٤٠

(١ + ت)^{ن} = [$\sqrt{2}$ (جتا $\frac{\pi}{4}$ + ت جا $\frac{\pi}{4}$)]^{ن}

= $\sqrt{2}^{ن}$ (جتا $\frac{ن\pi}{4}$ + ت جا $\frac{ن\pi}{4}$) المصورة المثلثية.

= $\sqrt{2}^{ن}$ جتا $\frac{ن\pi}{4}$ + ت ($\sqrt{2}^{ن}$ جا $\frac{ن\pi}{4}$) الصورة الجبرية

∴ ا = $\sqrt{2}^{ن}$ جتا $\frac{ن\pi}{4}$ ، ب = $\sqrt{2}^{ن}$ جا $\frac{ن\pi}{4}$

٤١

① ∵ ا ع$_1$ ا = ا ع$_2$ ا = ا ع$_3$ ا = ١

∴ ا ع$_1$ ا^2 = ا ع$_2$ ا^2 = ا ع$_3$ ا^2 = ١

∴ ع$_1$ ع$_1$ = ع$_2$ ع$_2$ = ع$_3$ ع$_3$ = ١ (١)

، ∵ ا $\frac{ع_1}{ع_2}$ + $\frac{ع_2}{ع_3}$ + $\frac{ع_3}{ع_1}$ ا = ١ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢)

∴ ا $\frac{ع_1 ع_1}{ع_2 ع_3}$ + $\frac{ع_2 ع_2}{ع_3 ع_1}$ + $\frac{ع_3 ع_3}{ع_1 ع_2}$ ا = ١

∴ ا ع$_1^2$ + ع$_2^2$ + ع$_3^2$ ا = ١

∴ ا ع$_1^2$ + ع$_2^2$ + ع$_3^2$ ا = ١

② ∵ ا ع$_1$ ا = ا ع$_2$ ا = ا ع$_3$ ا

، ع$_1$ ، ع$_2$ ، ع$_3$ صورة ع بدوران

حول (٠) بزاوية (٩٠°)

∴ (ع + ت ع) تمثل بالنقطة هـ

حيث و هـ قطر فى المربع و ب حـ

∴ مساحة Δ ا ب حـ = $\frac{1}{2}$ | ع | × | ع |

= $\frac{1}{2}$ | ع |^2

٤٣

③ من الرسم نجد أن :

(ع$_1$ + ع$_2$)

تمثل بالنقطة

أ حيث و أ قطر

فى المربع

∴ طول القطر = طول الضلع × $\sqrt{2}$

∴ | ع$_1$ + ع$_2$ | = | ع | × $\sqrt{2}$ = $\sqrt{2}$ × $\sqrt{2}$ = ٢

① ∵ (٢ $\sqrt{2}$ − ت)^{ن} = ٢^{ن} (١ − ت)^{ن} (١)

∴ (٢ $\sqrt{2}$ − ت)^{ن} = ٢^{ن} (١ − ت)^{ن} (٢)

بضرب المعادلتين (١) ، (٢)

∴ [(٢ $\sqrt{2}$ + ت) (٢ $\sqrt{2}$ − ت)]^{ن}

= ٤^{ن} ((١ + ت) (١ − ت))

(٨ ، ٠)^{ن} = ٤^{ن} (١^{ن} ، ٠)

∴ ٩ + ٠ ت = ٤^{ن} (١^{ن} + ٠ ت)

∴ ٩^{ن} = ٤^{ن} (١^{ن} + ٠ ت)

∴ ٩^{ن} + ٠ ت = ٤^{ن} (١^{ن} + ٠ ت)

⑤ من الرسم نجد أن

طول القطر الواصل

بين ع$_1$ ، ع$_2$

يمثل | ع$_1$ − ع$_2$ |

وباستخدام فيثاغورس

نجد أن

| ع$_1$ − ع$_2$ | = $\sqrt{(٢ \sqrt{2})^2 + (٢ \sqrt{2})^2}$ = ٨

① نفرض أن ع = س + ت ص

∴ | ع − ١ | = | ع + ٢ |

∴ | (س − ١) + ت ص | = | (س + ٢) + ت ص |

∴ $\sqrt{(س - ١)^2 + ص^2}$ = $\sqrt{(س + ٢)^2 + ص^2}$

∴ (س − ١)^2 = (س + ٢)^2

∴ س^2 − ٢ س + ١ = س^2 + ٤ س + ٤

∴ ٦ س = − ٣ ∴ س = − $\frac{1}{2}$

∴ ص يمكن أن تساوى أ

∴ ص يمكن أن تساوى أ

⑦ ∵ ع$_1$ = جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$

، ع$_2$ = جتا $\frac{\pi}{4}$ + ت جا $\frac{\pi}{4}$

، ع$_3$ = جتا $\frac{\pi}{8}$ + ت جا $\frac{\pi}{8}$

، ... وهكذا

∴ ع$_1$ × ع$_2$ × ع$_3$ × ... إلى ∞

= (جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$) (جتا $\frac{\pi}{4}$ + ت جا $\frac{\pi}{4}$) ...

جتا ($\frac{\pi}{2}$ + $\frac{\pi}{4}$ + $\frac{\pi}{8}$ + ...)

+ ت جا ($\frac{\pi}{2}$ + $\frac{\pi}{4}$ + $\frac{\pi}{8}$ + ...)

= جتا (،) + ت جا (،)

= جتا ( ) + ت جا ( )

باستخدام مجموع المتتابعة الهندسية

= جا (π) + ت جا (π) = ٠ + ت (٠) = ٠

إجابات تمارين 7

١

(١) ∵ ظا θ = ٠ ∴ θ = ٠ ∴ ٢θ = ٠

(٢) ∵ ظا θ = ٧ ∴ θ = ... ∴ ٢θ = ٧ ق حـ

(٣) ∵ $\sqrt{2}$ (جتا ٢θ + ت جا ٢θ) = (١ + ت)^2

∴ ٢θ = ٢ ق حـ ∴ θ = $\frac{\pi}{4}$ ق حـ

، ∵ س = ص ، ص = ٠

∴ θ تقع فى الربع الرابع

∴ θ = − $\frac{\pi}{4}$ ∴ ٢θ = − $\frac{\pi}{2}$

∴ ٢ ق حـ = − $\frac{\pi}{2}$ ∴ ق حـ = − $\frac{\pi}{4}$

(١) $\sqrt{2}$ ق حـ = − $\frac{\pi}{4}$ ∴ ق حـ = − $\frac{\pi}{8}$

∴ ٢ ق حـ = − $\frac{\pi}{4}$

∴ ق حـ = − $\frac{\pi}{8}$

$= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2)^2} = 4$

∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الأول

$\theta = ظا^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$ع = \frac{8}{2\sqrt{2} - ت} = 4\,قا_{\frac{\pi}{6}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{2} - ت} \times \frac{1 - 2\sqrt{2}ت}{1 - 2\sqrt{2}ت} = \frac{4(1 - 2\sqrt{2}ت)}{1 - 8ت^2}$

$= \frac{4(1 - 2\sqrt{2}ت)}{9} = 1 - 2\sqrt{2}ت$

$ل = \sqrt{(1)^2 + (-2\sqrt{2})^2} = 3$

∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ θ فى الربع الرابع

$\theta = ظا^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{2}}{1}\right) = \frac{-\pi}{3}$

$\frac{1}{1 + 2\sqrt{2}ت} = 2\,قا_{-\frac{\pi}{3}}$

$\pi = \theta ، 2 =$

$ع = 2(-ظا\pi + ت\,جا\pi)$

$= 2(-1 + ت \times صفر) = -2$

$\frac{\pi}{2} = -\theta ، 2 =$

$ع = 2\sqrt{2}\left(-ظا\frac{\pi}{4} + ت\,جا - \frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}(صفر - ت) = -2\sqrt{2}ت$

$\frac{\pi}{6} = \theta ، 8 =$

$ع = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}ت\right) = 4\sqrt{3} + 4ت$

$\frac{1}{2}(ظا60° + ت\,جا60°)$

$\frac{1}{2} = ل ، 60° = \theta$

$\frac{1}{ظا\theta - ت\,جا(-\theta) + ت\,جا(-\theta)} = \frac{1}{ظا\theta - ت}$

$= \frac{1}{قا_{-\theta} - ت\,قا_{-\theta}} = قا_{\theta} + ت\,قا_{\theta}$

٦

① $ع = \frac{2 - 2ت}{ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{2ت + 2}{-2} = -1 - ت$

$ل = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الثالث

$\theta = -\pi + ظا^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{-3\pi}{4}$

المسافة $ع = \sqrt{2}\left(ظا\frac{-3\pi}{4} + ت\,جا\frac{-3\pi}{4}\right)$

والصورة الأسية $ع = \sqrt{2}\,قا_{\frac{-3\pi}{4}}$

② $ع = \frac{\sqrt{2}ت}{1 + ت} \times \frac{1 - ت}{1 - ت} = \frac{\sqrt{2}ت - \sqrt{2}ت^2}{1 - ت^2}$

$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}ت}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}ت$

$ل = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$

∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الأول

$\theta = ظا^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = ظا^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

∴ المسافة $ع = ظا\frac{\pi}{4} + ت$

والصورة الأسية $ع = قا_{\frac{\pi}{4}}$

③ $ع = \frac{(ت - 1)(3 - 4ت)}{(1 + 2ت)}$

$= \frac{(ت - 1)(3 - 4ت)}{-2 + 4ت} = -1 - ت$

$ل = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

وبالتقدير الدائرى $= \frac{\pi}{180} \times \pi = \frac{\pi}{2}$

∴ العدد على الصورة الأسية $= \frac{1}{2}\,قا_{\frac{\pi}{2}}$

③ $-4\left(ظا\frac{\pi\sqrt{7}}{6} + ت\,جا\frac{\pi\sqrt{7}}{6}\right)$

$= 4\left(-ظا\frac{\pi\sqrt{7}}{6} - ت\,جا\frac{\pi\sqrt{7}}{6}\right)$

$= 4\left(-ظا\left(\pi + \frac{1}{6}\pi\right) - ت\,جا\left(\pi + \frac{1}{6}\pi\right)\right)$

$= 4\left(ظا\frac{\pi}{6} + ت\,جا\frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{\pi}{6} = \theta ، 4 = ل$

∴ العدد على الصورة الأسية $= 4\,قا_{\frac{\pi}{6}}$

④ $-2\left(ظا\frac{\pi}{3} - ت\,جا\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-ظا\frac{\pi}{3} + ت\,جا\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left(ظا\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + ت\,جا\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\left(ظا\frac{5\pi}{6} + ت\,جا\frac{5\pi}{6}\right)$

∴ العدد على الصورة الأسية $= 2\,قا_{\frac{5\pi}{6}}$

① $\sqrt{2}\left(-ظا\frac{3\pi}{4} + ت\,جا\frac{3\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(-ظا\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + ت\,جا\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(-ظا\frac{\pi}{4} - ت\,جا\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(ظا\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + ت\,جا\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(ظا\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + ت\,جا\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

∴ $ل = \sqrt{2}$ ، $\theta = \frac{-3\pi}{4}$

∴ العدد على الصورة الأسية $= \sqrt{2}\,قا_{\frac{-3\pi}{4}}$

٤

① $ل = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$

∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الرابع

$\theta = ظا^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right) = \frac{-\pi}{6}$

∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الرابع

$\theta = ظا^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{-\pi}{4}$

∴ الصورة المثلثية لـ $ع = \sqrt{2}\left(ظا\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right.$

$\left. + ت\,جا\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

والصورة الأسية لـ $ع = \sqrt{2}\,قا_{-\frac{\pi}{4}}$

٧

① (ب) ② (ب) ③ (أ) ④ (أ) ⑤ (ب)

⑥ (د) ⑦ (ج) ⑧ (ب) ⑨ (ب) ⑩ (ب)

⑪ (ب) ⑫ (أ) ⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (ج)

⑯ (ج) ⑰ (د) ⑱ (د) ⑲ (أ)

٨

① $قا_{\frac{\pi}{3}} = ظا\frac{\pi}{3} + ت\,جا\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت$

$قا_{-\frac{\pi}{3}} = ظا - \frac{\pi}{3} + ت\,جا - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ت$

$قا_{\frac{\pi}{3}} - قا_{-\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت\right)$

$- \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ت\right) = \sqrt{3}ت$

② $قا_{\pi + ت} = قا_{1} \times قا_{\pi ت}$

$= قا_{1}(ظا\pi + ت\,جا\pi)$

$= قا_{1}(-1 + صفر ت) = -قا_{1}$

$قا_{-\pi ت} = ظا(-\pi) + ت\,جا(-\pi)$

$= (-1 + صفر ت) = -1$

∴ $قا_{1 + \pi ت} - قا_{-\pi ت} = -قا_{1} - (-1)$

$= 1 - قا_{1}$

③ $قا_{\theta} = ظا\theta + ت\,جا\theta$

$قا_{-\theta} = ظا(-\theta) + ت\,جا(-\theta)$

وبالتقدير الدائرى $= \frac{\pi}{180} \times 30 = \frac{\pi}{6}$

∴ العدد على الصورة الأسية $= 2\,قا_{\frac{\pi}{6}}$

① $-2\left(ظا\frac{\pi}{6} + ت\,جا\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\left(-ظا\frac{\pi}{6} - ت\,جا\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\left(ظا\left(-\frac{\pi}{6}\right) + ت\,جا\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= 2\left(ظا\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + ت\,جا\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= 2\left(ظا\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + ت\,جا\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

∴ العدد على الصورة الأسية $= 2\,قا_{-\frac{2\pi}{3}}$

② $\sqrt{2}\left(-ظا\frac{3\pi}{4} + ت\,جا\frac{3\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(-ظا\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + ت\,جا\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(-ظا\frac{\pi}{4} + ت\,جا\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(ظا\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + ت\,جا\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(ظا\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + ت\,جا\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

∴ $ل = \sqrt{2}$ ، $\theta = \frac{-3\pi}{4}$

∴ العدد على الصورة الأسية $= \sqrt{2}\,قا_{\frac{-3\pi}{4}}$

∴ الصورة المثلثية لـ $ع = 2\sqrt{2}\left(ظا\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right.$

$\left. + ت\,جا\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

، الصورة الأسية لـ $ع = 2\sqrt{2}\,قا_{-\frac{\pi}{3}}$

② $\overline{ع} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}ت$ ∴ $ل = 2\sqrt{2}$

∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الأول

$\theta = ظا^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$

∴ الصورة المثلثية لـ $\overline{ع} = 2\sqrt{2}\left(ظا\frac{\pi}{4} + ت\,جا\frac{\pi}{4}\right)$

، الصورة الأسية لـ $\overline{ع} = 2\sqrt{2}\,قا_{\frac{\pi}{4}}$

④ $-\overline{ع} = -\sqrt{2} + 2\sqrt{2}ت$

∴ $ل = 2\sqrt{2}$ ∵ س < ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الثانى

$\theta = \pi + ظا^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$

∴ الصورة المثلثية لـ $(-\overline{ع})$

$= 2\sqrt{2}\left(ظا\frac{3\pi}{4} + ت\,جا\frac{3\pi}{4}\right)$

والصورة الأسية لـ $(-\overline{ع}) = 2\sqrt{2}\,قا_{\frac{3\pi}{4}}$

① $-\overline{ع} = -\sqrt{2} - 2\sqrt{2}ت$

∴ $ل = 2\sqrt{2}$ ∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الثالث

$\theta = -\pi + ظا^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}\right) = \frac{-3\pi}{4}$

∴ الصورة المثلثية لـ $(-\overline{ع})$

$= 2\sqrt{2}\left(ظا\frac{-3\pi}{4} + ت\,جا\frac{-3\pi}{4}\right)$

$قا_{\theta} \times قا_{-\theta} = (ظا\theta + ت\,جا\theta)$

$+ (ظا - \theta + ت\,جا - \theta)$

$= ظا\theta + ت\,ظا\theta + ظا\theta - ت\,ظا\theta$

$= 2ظا\theta$

∴ $ظا\theta = \frac{1}{2}(قا_{\theta} \times قا_{-\theta})$

① $قا_{\theta} = ظا\theta + ت\,ظا\theta$

$قا_{-\theta} = ظا(-\theta) + ت\,ظا(-\theta)$

∴ $قا_{\theta} - قا_{-\theta} = (ظا\theta + ت\,ظا\theta)$

$- (ظا(-\theta) + ت\,ظا(-\theta))$

$= ظا\theta + ت\,ظا\theta - ظا\theta + ت\,ظا\theta$

$= 2ت\,ظا\theta$

∴ $ظا\theta = \frac{1}{2ت}(قا_{\theta} - قا_{-\theta}) \times \left(\frac{ت}{ت}\right)$

$= \frac{-ت}{2}(قا_{\theta} - قا_{-\theta})$

٩

$ع = \frac{-4}{1 - 2\sqrt{2}ت} \times \frac{1 + 2\sqrt{2}ت}{1 + 2\sqrt{2}ت} = -1 - 2\sqrt{2}ت$

$ل = \sqrt{(-1)^2 + (-2\sqrt{2})^2} = 3$

∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ θ تقع فى الربع الثالث

$\theta = -\pi + ظا^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{2}}{-1}\right) = \frac{-3\pi}{4}$

∴ ع على الصورة المثلثية

$= 3\left(ظا\frac{-3\pi}{4} + ت\,جا\frac{-3\pi}{4}\right)$

وعلى الصورة الأسية $= 3\,قا_{\frac{-3\pi}{4}}$

① $\frac{1}{ع}$ على الصورة المثلثية

$= \frac{1}{6}\left(ظا\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + ت\,جا\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$

والصورة الأسية $= \frac{1}{6}\,قا_{\frac{-3\pi}{4}}$

② $\frac{1}{ع}$ على الصورة الأسية $= \frac{1}{3\,قا_{\frac{-3\pi}{4}}} = \frac{1}{3}\,قا_{\frac{3\pi}{4}}$

١٠

$ع = 2\left(ظا\frac{\pi}{3} + ت\,جا\frac{\pi}{3}\right)$

∴ $\frac{1}{ع} = \frac{1}{2}\left(ظا - \frac{\pi}{3} + ت\,جا - \frac{\pi}{3}\right)$

وعلى الصورة الأسية $\frac{1}{ع} = \frac{1}{2}\,قا_{-\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1}{2}\,قا_{(-\frac{\pi}{3} + 2\pi)ت} = \frac{1}{2}\,قا_{\frac{5\pi}{3}ت}$

١١

$ع_1 = 2(ظا75° + ت\,جا75°)$

، $ع_2 = 4(ظا15° + ت\,جا15°)$

∴ $ع_1 ع_2 = 2 \times 4(ظا75° + 15°)$

$+ ت\,جا(75° + 15°))$

$= 8(ظا90° + ت\,جا90°))$

∴ $ل = 8$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$

وعلى الصورة الأسية $= 8\,قا_{\frac{\pi}{2}}$

$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{2(ظا75° + ت\,جا75°)}{4(ظا15° + ت\,جا15°)}$

$= \frac{1}{2}(ظا60° + ت\,جا60°))$

∴ $ل = \frac{1}{2}$ ، θ (بالتقدير الدائرى) $= \frac{\pi}{180} \times \pi = \frac{\pi}{3}$

∴ $\frac{ع_1}{ع_2}$ على الصورة الأسية $= \frac{1}{2}\,قا_{\frac{\pi}{3}}$

١٢

$ع_2 = \frac{2ت}{-1 - ت} \times \frac{-1 + ت}{-1 + ت} = \frac{-2 + 2ت}{2} = -1 + ت$

∴ $|ع_2| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

∵ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ $\theta = ظا^{-1}(-1) = 135°$

∴ $ع_2 = \sqrt{2}(ظا135° + ت\,جا135°)$

∴ $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{4(ظا90° + ت\,جا90°)}{\sqrt{2}(ظا135° + ت\,جا135°)}$

$= 2\sqrt{2}(ظا60° + ت\,جا60°)$

∴ $\frac{ع_1}{ع_2}$ على الصورة الأسية $= 2\sqrt{2}\,قا_{\frac{\pi}{3}}$

∴ $L = \sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{2})^2 + (2)^2} = 4$

∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الأول

$\theta = ظا^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{6}$

∴ $\frac{A}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 1$ ∴ $A = \sqrt{2}\sqrt{2}$

⑤ $\frac{1}{1 + \sqrt{2}ت} \times \frac{1 - \sqrt{2}ت}{1 - \sqrt{2}ت} = \frac{1 - \sqrt{2}ت}{1 - 2ت^2} = \frac{1 - \sqrt{2}ت}{1 - 2(-1)}$

$= \frac{1 - \sqrt{2}ت}{3} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}ت$

∴ $L = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الرابع

$\theta = ظا^{-1}\left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}\right) = \frac{-\pi}{4}$

∴ $\frac{1}{\sqrt{2}ت} = 2$ ∴ $ع = 2\,هـ^{\frac{-\pi}{4}ت}$

٢

① $L = 2 ، \theta = \pi$

∴ $ع = 2(ظا\pi + ت\,ظا\pi)$

$= 2(-1 + ت \times صفر) = -2$

② $L = 4 ، \theta = \frac{-\pi}{2}$

∴ $ع = 4(ظا\frac{-\pi}{2} + ت\,ظا\frac{-\pi}{2})$

$= 4(صفر - ت) = -4ت$

③ $L = 8 ، \theta = \frac{\pi}{3}$

∴ $ع = 8(ظا\frac{\pi}{3} + ت\,ظا\frac{\pi}{3})$

$= 8(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت) = 4 + 4\sqrt{3}ت$

٣

① $\frac{1}{ع} = \frac{1}{4}(ظا 60° + ت\,ظا 60°)$

② $\frac{ظا\theta - ت\,ظا\theta}{ظا(-\theta) + ت\,ظا(-\theta)} = \frac{(ظا\theta - ت\,ظا\theta)(ظا\theta - ت\,ظا\theta)}{(ظا\theta + ت\,ظا\theta)(ظا\theta - ت\,ظا\theta)}$

$= \frac{ظا^2\theta - 2ت\,ظا\theta - ظا^2\theta}{ظا^2\theta + ظا^2\theta} = \frac{-2ت\,ظا\theta}{2ظا^2\theta}$

$= \frac{-ت}{ظا\theta} = \frac{1}{ظا\theta}ت = هـ^{\theta ت}$

٤

① $ع = \frac{-2 - 2ت}{ت} \times \frac{ت}{ت} = \frac{2ت - 2ت^2}{-1} = 2 - 2ت$

∴ $L = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الثالث

∴ $\theta = -\pi + ظا^{-1}\left(\frac{-2}{-1}\right) = \frac{-2\pi}{3}$

الصورة المثلثية $ع = \sqrt{5}\left(ظا\frac{-2\pi}{3} + ت\,ظا\frac{-2\pi}{3}\right)$

والصورة الأسية $ع = \sqrt{5}\,هـ^{\frac{-2\pi}{3}ت}$

② $ع = \frac{\sqrt{2}ت}{1 + ت} \times \frac{1 - ت}{1 - ت} = \frac{\sqrt{2}ت - \sqrt{2}ت^2}{1 - ت^2}$

$= \frac{\sqrt{2}ت + \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}ت$

∴ $L = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1$

∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الأول

∴ $\theta = ظا^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = ظا^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

∴ الصورة المثلثية $ع = ظا\frac{\pi}{4} + ت\,ظا\frac{\pi}{4}$

والصورة الأسية $ع = هـ^{\frac{\pi}{4}ت}$

③ $\frac{(ت - 1)(2 - ت)}{(1 + 2ت)(2 - ت)}$

$= \frac{-ت - 2 + 1 - 2ت}{2 + ت - 4ت + 2} = \frac{-1 - 3ت}{4 - 3ت}$

$= \frac{-1 - 3ت}{4 - 3ت} \times \frac{4 + 3ت}{4 + 3ت} = \frac{-4 - 3ت - 12ت - 9ت^2}{16 + 9}$

$= \frac{5 - 15ت}{25} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}ت$

∴ $L = \sqrt{(\frac{1}{5})^2 + (-\frac{3}{5})^2} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الرابع

∴ $\theta = ظا^{-1}\left(\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}}\right) = ظا^{-1}(-3) = -1.25$ ق

∴ الصورة المثلثية $ع = \frac{\sqrt{10}}{5}(ظا(-1.25) + ت\,ظا(-1.25))$

والصورة الأسية $ع = \frac{\sqrt{10}}{5}\,هـ^{-1.25ت}$

٥

① $L = \sqrt{(\sqrt{2}\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2}\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{5}$

∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ θ تقع فى الربع الرابع

$\theta = ظا^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{2}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) = ظا^{-1}(-1) = \frac{-\pi}{4}$

∴ الصورة المثلثية لـ $ع = 2\sqrt{2}\left(ظا\frac{-\pi}{4} + ت\,ظا\frac{-\pi}{4}\right)$

والصورة الأسية لـ $ع = 2\sqrt{2}\,هـ^{\frac{-\pi}{4}ت}$

٦

① $L = 2 ، \theta = \frac{\pi}{2}$

∴ $ع = 2(ظا\frac{\pi}{2} + ت\,ظا\frac{\pi}{2})$

$= 2(1 + ت \times صفر) = 2$

② $L = 4 ، \theta = \frac{\pi}{3}$

∴ $ع = 4(ظا\frac{\pi}{3} + ت\,ظا\frac{\pi}{3})$

$= 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}ت) = 2\sqrt{3} + 2ت$

③ $L = 8 ، \theta = \frac{\pi}{6}$

∴ $ع = 8(ظا\frac{\pi}{6} + ت\,ظا\frac{\pi}{6})$

$= 8(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}ت) = \frac{8\sqrt{3}}{3} + \frac{8}{3}ت$

④ $L = 2 ، \theta = \frac{-\pi}{2}$

∴ $ع = 2(ظا\frac{-\pi}{2} + ت\,ظا\frac{-\pi}{2})$

$= 2(-\frac{1}{ظا\frac{\pi}{2}} + ت\,ظا\frac{-\pi}{2})$

$= 2(-ظا\frac{\pi}{2} + ت\,ظا\frac{-\pi}{2})$

∴ العدد على الصورة الأسية $= 2\,هـ^{\frac{-\pi}{2}ت}$

⑤ $4\sqrt{2}(-ظا\frac{\pi}{4} + ت\,ظا\frac{3\pi}{4})$

$= 4\sqrt{2}\left(-ظا(\pi - \frac{3}{4}) + ت\,ظا(\pi - \frac{1}{4})\right)$

$= 4\sqrt{2}(-ظا\frac{1}{4} - ت\,ظا\frac{1}{4})$

$= 4\sqrt{2}\left(ظا(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}) + ت\,ظا(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4})\right)$

$= 4\sqrt{2}(ظا(-\frac{\pi}{4} - 1) + ت\,ظا(-\frac{\pi}{4} - 1))$

∴ $L = 4\sqrt{2}$ ، $\theta = \frac{-3\pi}{4}$

∴ العدد على الصورة الأسية $= 4\sqrt{2}\,هـ^{\frac{-3\pi}{4}ت}$

٧

① (ب) ② (ب) ③ (أ) ④ (ب) ⑤ (د) ⑥ (ب) ⑦ (هـ) ⑧ (هـ) ⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (ب) ⑫ (أ) ⑬ (ب) ⑭ (هـ) ⑮ (هـ) ⑯ (أ) ⑰ (ب) ⑱ (أ)

٨

① $هـ^{\frac{\pi}{2}ت} = ظا\frac{\pi}{2} + ت\,ظا\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت$

$هـ^{\frac{-\pi}{3}ت} = ظا\frac{-\pi}{3} + ت\,ظا\frac{-\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ت$

∴ $هـ^{\frac{\pi}{2}ت} - هـ^{\frac{-\pi}{3}ت} = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت) - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ت)$

$= \sqrt{3}ت$

② $هـ^{1 + \pi ت} = هـ^1 \times هـ^{\pi ت}$

$= هـ^1(ظا\pi + ت\,ظا\pi)$

$= هـ^1(-1 + صفر ت) = -هـ^1$

$هـ^{-\pi ت} = ظا(-\pi) + ت\,ظا(-\pi)$

$= (-1 + صفر ت) = -1$

∴ $هـ^{1 + \pi ت} - هـ^{-\pi ت} = -هـ^1 - (-1)$

$= 1 - هـ^1$

③ $هـ^{\theta ت} = ظا\theta + ت\,ظا\theta$

$هـ^{-\theta ت} = ظا(-\theta) + ت\,ظا(-\theta)$

$= ظا\theta - ت\,ظا\theta$

∴ $هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت} = (ظا\theta + ت\,ظا\theta) - (ظا\theta - ت\,ظا\theta)$

$= 2ت\,ظا\theta$

∴ $ظا\theta = \frac{1}{2ت}(هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}) \times (\frac{ت}{ت})$

$= \frac{ت}{2}(هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت})$

٩

$ع = \frac{-1}{1 - \sqrt{2}ت} \times \frac{1 + \sqrt{2}ت}{1 + \sqrt{2}ت} = \frac{-1 - \sqrt{2}ت}{1 + 2ت^2} = -1 - \sqrt{2}ت$

∴ $L = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$

∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ θ تقع فى الربع الثالث

∴ $\theta = -\pi + ظا^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{-1}\right) = \frac{-2\pi}{3}$

∴ ع على الصورة المثلثية

$= 2(ظا\frac{-2\pi}{3} + ت\,ظا\frac{-2\pi}{3})$

وعلى الصورة الأسية $= 2\,هـ^{\frac{-2\pi}{3}ت}$

① $\frac{1}{ع}$ على الصورة المثلثية

$= \frac{1}{2}(ظا\frac{2\pi}{3} + ت\,ظا\frac{2\pi}{3})$

وهو عدد حقيقى

② $\frac{1}{ع}$ على الصورة الأسية $= \frac{1}{2\,هـ^{\frac{-2\pi}{3}ت}} = \frac{1}{2}\,هـ^{\frac{2\pi}{3}ت}$

∴ الصورة المثلثية لـ $ع = 2\sqrt{2}(ظا(-\frac{\pi}{4}) + ت\,ظا(-\frac{\pi}{4}))$

، الصورة الأسية لـ $ع = 2\sqrt{2}\,هـ^{\frac{-\pi}{4}ت}$

③ $ع = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}ت$

∴ $L = 2\sqrt{2}$ ∵ س < ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الثانى

$\theta = \pi - ظا^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$

∴ الصورة المثلثية لـ $ع = 2\sqrt{2}(ظا\frac{3\pi}{4} + ت\,ظا\frac{3\pi}{4})$

والصورة الأسية لـ $(-ع) = 2\sqrt{2}\,هـ^{\frac{-3\pi}{4}ت}$

④ $-ع = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}ت$

∴ $L = 2\sqrt{2}$ ∵ س < ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الثانى

$\theta = \pi - ظا^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$

∴ الصورة المثلثية لـ $(-ع) = 2\sqrt{2}(ظا\frac{3\pi}{4} + ت\,ظا\frac{3\pi}{4})$

والصورة الأسية لـ $(-ع) = 2\sqrt{2}\,هـ^{\frac{3\pi}{4}ت}$

١٠

① $L(ظا\theta - ت\,ظا\theta) = L(ظا\theta + ت\,ظا(-\theta))$

والصورة الأسية $= L\,هـ^{-\theta ت}$

② $-L(ظا\theta + ت\,ظا\theta) = L(-ظا\theta - ت\,ظا\theta)$

$= L(ظا(-\pi - \theta) + ت\,ظا(-\pi - \theta))$

والصورة الأسية $= L\,هـ^{(-\pi - \theta)ت}$

③ $2(-ظا\theta + ت\,ظا\theta)$

$= 2(ظا(\pi - \theta) + ت\,ظا(\pi - \theta))$

والصورة الأسية $= 2\,هـ^{(\pi - \theta)ت}$

④ $2(ظا\theta + ت\,ظا\theta) = 2\left(ظا(\frac{\pi}{2} - \theta) + ت\,ظا(\frac{\pi}{2} - \theta)\right)$

والصورة الأسية لـ $(ع) = 2\,هـ^{(\frac{\pi}{2} - \theta)ت}$

١١

$ع_1 = 2(ظا 75° + ت\,ظا 75°)$

$ع_2 = 1(ظا 15° + ت\,ظا 15°)$

$ع_1 ع_2 = 2 \times 1(ظا(75° + 15°) + ت\,ظا(75° + 15°))$

$= 2(ظا 90° + ت\,ظا 90°)$

$= 2(\frac{1}{ظا 90°} + ت\,ظا 90°)$

$= 2(0 + ت \times صفر) = 0$

∴ $L = 0 ، \theta = \frac{\pi}{2}$

وعلى الصورة الأسية $= 0\,هـ^{\frac{\pi}{2}ت}$

$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{2(ظا 75° + ت\,ظا 75°)}{1(ظا 15° + ت\,ظا 15°)}$

∴ الصورة المثلثية لمقدار $\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(ظا\frac{\pi}{4} + ت\,ظا\frac{\pi}{4})$

، الصورة الأسية لمقدار $\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,هـ^{\frac{\pi}{4}ت}$

③ $\frac{1}{ع} = \frac{(ظا 0° + ت\,ظا 0°)}{2\sqrt{2}(ظا(\frac{-\pi}{4}) + ت\,ظا(\frac{-\pi}{4}))}$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(ظا\frac{\pi}{4} + ت\,ظا\frac{\pi}{4})$

∴ الصورة المثلثية لمقدار $\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(ظا\frac{\pi}{4} + ت\,ظا\frac{\pi}{4})$

، الصورة الأسية لمقدار $\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,هـ^{\frac{\pi}{4}ت}$

١٢

$ع = 2(ظا\frac{\pi}{3} + ت\,ظا\frac{\pi}{3})$

∴ $\frac{1}{ع} = \frac{1}{2}(ظا\frac{-\pi}{3} + ت\,ظا\frac{-\pi}{3})$

وعلى الصورة الأسية $\frac{1}{ع} = \frac{1}{2}\,هـ^{\frac{-\pi}{3}ت}$

$= \frac{1}{2}\,هـ^{(2\pi - \frac{\pi}{3})ت} = \frac{1}{2}\,هـ^{\frac{5\pi}{3}ت}$

١٣

$ع_1 = 4(ظا 45° + ت\,ظا 45°)$

$ع_2 = 2(ظا 30° + ت\,ظا 30°)$

$ع_1 ع_2 = 4 \times 2(ظا(45° + 30°) + ت\,ظا(45° + 30°))$

$= 8(ظا 75° + ت\,ظا 75°)$

∴ $L = 8 ، \theta = 75°$

وعلى الصورة الأسية $= 8\,هـ^{\frac{5\pi}{12}ت}$

$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{4(ظا 45° + ت\,ظا 45°)}{2(ظا 30° + ت\,ظا 30°)}$

$= 2(ظا 15° + ت\,ظا 15°)$

∴ $L = 2 ، \theta = 15°$

وعلى الصورة الأسية $= 2\,هـ^{\frac{\pi}{12}ت}$

١٤

$ع = 2(ظا\frac{\pi}{2} + ت\,ظا\frac{\pi}{2})$

$\frac{1}{ع} = \frac{1}{2}(ظا\frac{-\pi}{2} + ت\,ظا\frac{-\pi}{2})$

$= \frac{1}{2}(-ظا\frac{\pi}{2} + ت\,ظا\frac{-\pi}{2})$

$= \frac{1}{2}(-1 + ت \times صفر) = -\frac{1}{2}$

∴ $L = \frac{1}{2} ، \theta = \pi$

وعلى الصورة الأسية $= \frac{1}{2}\,هـ^{\pi ت}$

$ع^2 = 4(ظا\pi + ت\,ظا\pi)$

$= 4(0 + ت \times صفر) = 0$

∴ $L = 0$

١٣

$ع_{١} = ٢ (جتا (٩٠° + ١٠°) + ت جا (٩٠° + ١٠°))$

$= ٢ (جتا ١٠٠° + ت جا ١٠٠°)$

$ع_{٢} = ١ (جتا (١٠° - ١٨٠°) + ت جا (١٠° - ١٨٠°))$

$= ١ (جتا (-١٧٠°) + ت جا (-١٧٠°))$

$\therefore \frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \frac{١ (جتا (-١٧٠°) + ت جا (-١٧٠°))}{٢ (جتا ١٠٠° + ت جا ١٠٠°)}$

$= \frac{١}{٢} [(جتا (١٠٠° - (-١٧٠°)) + ت جا (١٠٠° - (-١٧٠°)))]$

$= \frac{١}{٢} (جتا ٢٧٠° + ت جا ٢٧٠°)$

$= \frac{١}{٢} (جتا (-٩٠°) + ت جا (-٩٠°))$

$\therefore ل = \frac{١}{٢}$ ، $\theta = -\frac{\pi}{٢}$

$\therefore$ الصورة الأسية للعدد $\frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \frac{١}{٢} هـ^{-\frac{\pi}{٢} ت}$

١٤

① $\frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \frac{٦ (جتا ٢٤٠° + ت جا ٢٤٠°)}{٢ (جتا ٢٠٠° + ت جا ٢٠٠°)}$

$= ٣ (جتا (٢٤٠° - ٢٠٠°) + ت جا (٢٤٠° - ٢٠٠°))$

$= ٣ (جتا (٤٠°) + ت جا (٤٠°))$

$\therefore ل = ٣$ ، $\theta = \frac{\pi}{٩}$

$\therefore$ الصورة الأسية لـ $\frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = ٣ هـ^{\frac{\pi}{٩} ت}$

② $\frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \frac{٦ (جتا ٢٤٠° + ت جا ٢٤٠°)}{٢ (جتا ٢٠٠° + ت جا ٢٠٠°)}$

$= \frac{١}{٣} (جتا (٢٤٠° - ٢٠٠°) + ت جا (٢٤٠° - ٢٠٠°))$

$= \frac{١}{٣} (جتا ٤٠° + ت جا ٤٠°)$

$\therefore ل = \frac{١}{٣}$ ، $\theta = \frac{\pi}{٩}$

$\therefore$ الصورة الأسية لـ $\frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \frac{١}{٣} هـ^{\frac{\pi}{٩} ت}$

١٥

$ع_{١} = ٢ (جتا ١٥٠° - ت جا ١٥٠°)$

$= ٢ (جتا (-١٥٠°) + ت جا (-١٥٠°))$

$\therefore ل = ٢$ ، $\theta = \frac{-٥\pi}{٦}$

$\therefore ع_{١} = ٢ هـ^{-\frac{٥\pi}{٦} ت}$

$، ع_{٢} = ٣ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)$

$= ٣ (جتا ٣٠° - ت جا ٣٠°)$

$= ٣ (جتا (-٦٠°) + ت جا (-٦٠°))$

$\therefore ل = ٣$ ، $\theta = \frac{-\pi}{٣}$

$\therefore ع_{٢} = ٣ هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت}$

$ع_{١}^{٦} = ٦ هـ^{-\frac{٥\pi}{٦} ت \times ٦} = ٦ هـ^{-٥\pi ت}$

$ع_{٢}^{٤} = ٤ هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت \times ٤} = ٤ هـ^{-\frac{٤\pi}{٣} ت}$

$ع_{١}^{٦} ع_{٢}^{٤} = ٨١ هـ^{-\frac{٢٣\pi}{٣} ت} = ٨١ هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت}$

١٦

① الصورة الأسية $= ٦ هـ^{\frac{\pi}{٣} ت} \times ٤ هـ^{\frac{\pi}{٦} ت} = ٢٤ هـ^{\frac{\pi}{٢} ت}$

والصورة المثلثية $= ٢٤ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})$

② $ع = (-٢ + ٢ ت) (جتا \frac{\pi}{٤} + ت جا \frac{\pi}{٤})$

$= (-٢ + ٢ ت) (١ + ت)$

$= -٢ - ٢ ت + ٢ ت^{٢} = -٤ - ٢ ت$

١٧

الصورة الأسية لـ $ع_{١} = هـ^{\frac{\pi}{٢} ت}$

$\therefore ع_{١}^{٢} = هـ^{\frac{\pi}{٢} ت \times ٢} = هـ^{\pi ت}$

الصورة الأسية لـ $ع_{٢} = هـ^{\frac{\pi}{٤} ت}$

$\therefore ع_{٢}^{٤} = هـ^{\frac{\pi}{٤} ت \times ٤} = هـ^{\pi ت}$

والصورة الأسية لـ $ع_{٣} = هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$

$\therefore ع_{٣}^{٣} = هـ^{\frac{\pi}{٣} ت \times ٣} = هـ^{\pi ت}$

$\therefore$ الصورة الأسية لـ $\frac{ع_{٢}^{٤}}{ع_{١}^{٢} ع_{٣}^{٣}}$

$= هـ^{\pi ت - \pi ت - \pi ت} = هـ^{-\pi ت} = هـ^{\pi ت}$

١٨

$ع_{١} = ١ + \sqrt{٣} ت$

$\therefore ل = \sqrt{(١)^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢}} = ٢$ ، $\theta = ظا^{-١} (\frac{\sqrt{٣}}{١}) = ٦٠°$

$\because$ س $>$ ٠ ، ص $>$ ٠

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول. $\therefore \theta = \frac{\pi}{٣}$

$\therefore ع_{١}$ على الصورة الأسية $= ٢ هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$

$ع_{٢} = ١ - \sqrt{٣} ت$

$\therefore ل = \sqrt{١^{٢} + (-\sqrt{٣})^{٢}} = ٢$ ، $\theta = ظا^{-١} (\frac{-\sqrt{٣}}{١}) = -\frac{\pi}{٣}$

$\because$ س $>$ ٠ ، ص $<$ ٠

$\therefore \theta$ تقع في الربع الرابع. $\therefore \theta = -\frac{\pi}{٣}$

$\therefore ع_{٢}$ على الصورة الأسية $= ٢ هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت}$

$\therefore \frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{٢ هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}}{٢ هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت}} = هـ^{\frac{٢\pi}{٣} ت}$

$\therefore ع_{١}$ على الصورة الأسية $= هـ^{\frac{٢\pi}{٣} ت}$

① الصورة الأسية $= \frac{١}{٢} هـ^{\frac{\pi}{١٢} ت} \times ٤ هـ^{\frac{\pi}{٤} ت} = ٢ هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$

والصورة المثلثية $= ٢ (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})$

② الصورة الأسية $= \frac{٢ \times ٢ هـ^{\frac{\pi}{٤} ت}}{٢ هـ^{\frac{\pi}{١٢} ت}}$

$= \frac{٦ هـ^{\frac{\pi}{٤} ت}}{٢ هـ^{\frac{\pi}{١٢} ت}}$

$= ٣ هـ^{\frac{\pi}{٤} ت - \frac{\pi}{١٢} ت} = ٣ هـ^{\frac{\pi}{٦} ت}$

والصورة المثلثية $= ٣ (جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦})$

١٧

$ع_{١} = ١ (جتا \frac{\pi}{٥} - ت جا \frac{\pi}{٥})$

$= ١ (جتا (-\frac{\pi}{٥}) + ت جا (-\frac{\pi}{٥}))$

$= ١ (جتا (٢\pi - \frac{\pi}{٥}) + ت جا (٢\pi - \frac{\pi}{٥}))$

$= ١ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})$

$ع_{٢} = هـ^{\frac{\pi}{٢} ت}$ على الصورة المثلثية $ع_{٢} = جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢}$

$\therefore ع = \frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{١ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})}{١ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})}$

$= \frac{١}{١} (جتا (\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢}) + ت جا (\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢}))$

$= \frac{١}{١} (جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦})$

١٨

$ع_{١} = ١ + \sqrt{٣} ت$

$\therefore ل = \sqrt{(١)^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢}} = ٢$ ، $\theta = ظا^{-١} (\frac{\sqrt{٣}}{١}) = ٦٠°$

$\because$ س $>$ ٠ ، ص $>$ ٠

$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول. $\therefore \theta = \frac{\pi}{٣}$

$\therefore ع_{١}$ على الصورة الأسية $= ٢ هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$

$ع_{٢} = ١ - \sqrt{٣} ت$

$\therefore ل = \sqrt{١^{٢} + (-\sqrt{٣})^{٢}} = ٢$ ، $\theta = ظا^{-١} (\frac{-\sqrt{٣}}{١}) = -\frac{\pi}{٣}$

$\because$ س $>$ ٠ ، ص $<$ ٠

$\therefore \theta$ تقع في الربع الرابع. $\therefore \theta = -\frac{\pi}{٣}$

$\therefore ع_{٢}$ على الصورة الأسية $= ٢ هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت}$

$\therefore \frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{٢ هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}}{٢ هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت}} = هـ^{\frac{٢\pi}{٣} ت}$

$\therefore ع_{١}$ على الصورة الأسية $= هـ^{\frac{٢\pi}{٣} ت}$

١٩

$ع_{١} = ٢ (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})$

$ع_{٢} = ١ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})$

$\therefore ع = ع_{١} ع_{٢} = ٢ (جتا \frac{٥\pi}{٦} + ت جا \frac{٥\pi}{٦})$

$= ٢ (جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦})$

$، ع_{٣} = ٢ (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})$

$\therefore ع_{٣}^{٢} = ١ (جتا \frac{٢\pi}{٣} + ت جا \frac{٢\pi}{٣})$

$\therefore ع = ع_{١} ع_{٣}^{٢} = ٢ (جتا \frac{٥\pi}{٦} + ت جا \frac{٥\pi}{٦})$

$= ٢ (جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦})$

$\therefore ل = ٢$ ، $\theta = \frac{\pi}{٦}$

$\therefore$ الصورة الأسية لـ $ع = ٢ هـ^{\frac{\pi}{٦} ت}$

٢٠

$ع_{١} = \sqrt{٢} (\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} ت) = ١ - ت$

$\therefore ع_{١}^{٢} = (١ - ت)^{٢} = ١ - ٢ ت + ت^{٢} = -٢ ت$

$\therefore \frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \frac{-٢ ت}{١ - ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{-٢ ت + ٢ ت^{٢}}{٢} = -١ - ت$

$\therefore ع = -١ - ت$ $\therefore ل = \sqrt{٢}$

$\because$ س $<$ ٠ ، ص $<$ ٠

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثالث.

$\therefore \theta = -\pi + ظا^{-١} (\frac{-١}{-١}) = -\frac{٣\pi}{٤}$

$\therefore ع_{١}$ على الصورة الأسية $= \sqrt{٢} هـ^{-\frac{٣\pi}{٤} ت}$

$\therefore ع_{٢}$ على الصورة الأسية $= ٢ هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت}$

$\therefore \frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{\sqrt{٢} هـ^{-\frac{٣\pi}{٤} ت}}{٢ هـ^{-\frac{\pi}{٣} ت}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} هـ^{-\frac{٥\pi}{١٢} ت}$

$\therefore ع_{١}^{١١} = (\sqrt{٢})^{١١} هـ^{-\frac{٥\pi}{١٢} \times ١١} = ٣٢ هـ^{-\frac{٥٥\pi}{١٢} ت}$

$= ٣٢ هـ^{-\frac{\pi}{١٢} ت}$

$\therefore ع_{١}^{١١} = ٣٢ (جتا \pi + ت جا \pi) = -٣٢$ (عدد حقيقي)

٢١

① الصورة الأسية $= \frac{١}{٢} هـ^{\frac{\pi}{١٢} ت} \times ٤ هـ^{\frac{\pi}{٤} ت} = ٢ هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$

والصورة المثلثية $= ٢ (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})$

② الصورة الأسية $= \frac{٢ \times ٢ هـ^{\frac{\pi}{٤} ت}}{٢ هـ^{\frac{\pi}{١٢} ت}}$

$= \frac{٦ هـ^{\frac{\pi}{٤} ت}}{٢ هـ^{\frac{\pi}{١٢} ت}}$

$= ٣ هـ^{\frac{\pi}{٤} ت - \frac{\pi}{١٢} ت} = ٣ هـ^{\frac{\pi}{٦} ت}$

والصورة المثلثية $= ٣ (جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦})$

٢٢

$ع_{١} = ١ (جتا \frac{\pi}{٥} - ت جا \frac{\pi}{٥})$

$= ١ (جتا (-\frac{\pi}{٥}) + ت جا (-\frac{\pi}{٥}))$

$= ١ (جتا (٢\pi - \frac{\pi}{٥}) + ت جا (٢\pi - \frac{\pi}{٥}))$

$= ١ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})$

$ع_{٢} = هـ^{\frac{\pi}{٢} ت}$ على الصورة المثلثية $ع_{٢} = جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢}$

$\therefore ع = \frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{١ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})}{١ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})}$

$= \frac{١}{١} (جتا (\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢}) + ت جا (\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢}))$

$= \frac{١}{١} (جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦})$

٢٣

$ع = ١ - ت$

$\therefore ل = \sqrt{١^{٢} + (-١)^{٢}} = \sqrt{٢}$

$\because$ س $>$ ٠ ، ص $<$ ٠

$\therefore \theta$ تقع في الربع الرابع.

$\therefore \theta = -ظا^{-١} (\frac{-١}{١}) = -\frac{\pi}{٤}$

$\therefore ع = \sqrt{٢} هـ^{-\frac{\pi}{٤} ت}$

$\therefore ع^{٨} = (\sqrt{٢})^{٨} هـ^{-\frac{\pi}{٤} ت \times ٨} = ١٦ هـ^{-٢\pi ت}$

$= ١٦ هـ^{٠ ت} = ١٦$

٢٤

$ع_{١} = ٢ (جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣})$

$ع_{٢} = ٣ (جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦})$

$\therefore ع = ع_{١} ع_{٢} = ٦ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})$

$= ٦ (٠ + ت)$

$= ٦ ت$

٢٥

$ع = هـ^{\theta ت}$

$\therefore ع - ع جتا \theta = ت جا \theta$

$\therefore \frac{ع}{ع} - \frac{جتا \theta}{ع} = \frac{ت جا \theta}{ع}$

$١ - ت (جتا \theta - ت جا \theta) = ت جا \theta$

$١ - ت جتا \theta - ت^{٢} جا \theta = ت جا \theta$

$١ + جا \theta - ت جتا \theta = ت جا \theta$

$١ + جا \theta = ت جا \theta + ت جتا \theta$

$١ + جا \theta = ت [جا \frac{\theta}{٢} + ت جا \frac{\theta}{٢}]$

$١ + ٢ جا \frac{\theta}{٢} جتا \frac{\theta}{٢} = ت [جا \frac{\theta}{٢} جتا \frac{\theta}{٢} + ت جا^{٢} \frac{\theta}{٢}]$

$٢ جا \frac{\theta}{٢} جتا \frac{\theta}{٢} + ت [جا \frac{\theta}{٢} جتا \frac{\theta}{٢} - جا^{٢} \frac{\theta}{٢}]$

$جا \frac{\theta}{٢} [جا \frac{\theta}{٢} + ت جتا \frac{\theta}{٢}] = ت [جا \frac{\theta}{٢} جتا \frac{\theta}{٢} - جا^{٢} \frac{\theta}{٢}]$

$جا \frac{\theta}{٢} [جا \frac{\theta}{٢} + ت جتا \frac{\theta}{٢}] = ت جا \frac{\theta}{٢} [جتا \frac{\theta}{٢} - جا \frac{\theta}{٢}]$

$جا \frac{\theta}{٢} [جا \frac{\theta}{٢} + ت جتا \frac{\theta}{٢}] = ت جا \frac{\theta}{٢} [جتا \frac{\theta}{٢} + ت جا \frac{\theta}{٢}]$

$\therefore$ المقدار $= جا \frac{\theta}{٢}$ والسعة $= \frac{\theta}{٢}$

① (ب) ② (ب) ③ (أ) ④ (د)

إرشادات للحل ٢٧ :

① $ت^{ت} = (هـ^{\frac{\pi}{٢} ت})^{ت} = هـ^{\frac{\pi}{٢} ت^{٢}} = هـ^{-\frac{\pi}{٢}}$

② $\because ٢ هـ^{أ \theta} = ب + هـ^{-٢ \theta}$

$٤ جتا ٢ \theta - ٦ ت جا ٢ \theta$

$\therefore ٢ (جتا ٢ \theta + ت جا ٢ \theta) + ب (جتا (-٢ \theta) + ت جا (-٢ \theta)) = ٤ جتا ٢ \theta - ٦ ت جا ٢ \theta$

$\therefore (٢ + ب) جتا ٢ \theta + (٢ - ب) ت جا ٢ \theta = ٤ جتا ٢ \theta - ٦ ت جا ٢ \theta$

$\therefore ٢ + ب = ٤$ ، $٢ - ب = -٦$

$\therefore ٢ ب = -٢$ ، $ب = -١$

$\therefore ٢ = ٥$

③ $\because$ س $+$ ص $ت = هـ^{\theta ت} = جتا \theta + ت جا \theta$

$\therefore$ س $= جتا \theta$ ، ص $= جا \theta$

$\because -١ \leq جا ٢ \theta \leq ١$

$\therefore -\frac{١}{٢} \leq \frac{١}{٢} جا ٢ \theta \leq \frac{١}{٢}$

$\therefore -\frac{١}{٢} \leq$ ص $\leq \frac{١}{٢}$

$\therefore$ أقل قيمة لقيمة ص هي $-\frac{١}{٢}$

④ من الشكل نجد أن

المثلث متساوي الساقين وقياس الزاوية

$\therefore$ قياس كل من زاويتي القاعدة $= ٦٠°$

$\therefore ع_{١} = ٢ \sqrt{٣}$ ، $ع_{٢} = ٢ \sqrt{٣} هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$

ولكن أن سعة $(ع_{١})$ هي θ

سعة $(ع_{٢})$ هي $\theta + ٦٠°$

أجابات تمارين 8

١

① $ع_1^2 = 1 = جتا\,٠ + ت\,جا\,٠$

$\therefore ع = (جتا\frac{٢\pi ن}{٤} + ت\,جا\frac{٢\pi ن}{٤})$

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

عند ن = ٠ :

$\therefore ع_0 = جتا\,٠ + ت\,جا\,٠ = ١$

عند ن = ١ :

$\therefore ع_1 = جتا\frac{\pi}{٢} + ت\,جا\frac{\pi}{٢} = ت$

عند ن = ٢ :

$\therefore ع_2 = جتا\pi + ت\,جا\pi = -١$

عند ن = ٣ :

$\therefore ع_3 = جتا\frac{٣\pi}{٢} + ت\,جا\frac{٣\pi}{٢} = -ت$

② $ع_2^4 = 1 = جتا\,٠ + ت\,جا\,٠$

$\therefore ع = (جتا\frac{٢\pi ن}{٤} + ت\,جا\frac{٢\pi ن}{٤})$

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

عند ن = ٠ :

$\therefore ع_0 = جتا\,٠ + ت\,جا\,٠ = ١$

عند ن = ١ :

$\therefore ع_1 = جتا\frac{\pi}{٢} + ت\,جا\frac{\pi}{٢} = ت$

عند ن = ٢ :

$\therefore ع_2 = جتا\pi + ت\,جا\pi = -١$

عند ن = ٣ :

$\therefore ع_3 = جتا\frac{٣\pi}{٢} + ت\,جا\frac{٣\pi}{٢} = -ت$

③ $ع_3^3 = -١ = جتا\pi + ت\,جا\pi$

$\therefore ع = (جتا\frac{\pi + ٢\pi ن}{٣} + ت\,جا\frac{\pi + ٢\pi ن}{٣})$

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢

عند ن = ٠ :

$\therefore ع_0 = جتا\frac{\pi}{٣} + ت\,جا\frac{\pi}{٣} = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

عند ن = ١ :

$\therefore ع_1 = جتا\pi + ت\,جا\pi = -١$

عند ن = ٢ :

$\therefore ع_2 = جتا\frac{٥\pi}{٣} + ت\,جا\frac{٥\pi}{٣} = \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

④ $ع_4^4 = -١ = جتا\pi + ت\,جا\pi$

$\therefore ع = (جتا\frac{\pi + ٢\pi ن}{٤} + ت\,جا\frac{\pi + ٢\pi ن}{٤})$

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

عند ن = ٠ :

$\therefore ع_0 = جتا\frac{\pi}{٤} + ت\,جا\frac{\pi}{٤} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢}ت$

عند ن = ١ :

$\therefore ع_1 = جتا\frac{٣\pi}{٤} + ت\,جا\frac{٣\pi}{٤} = -\frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢}ت$

عند ن = ٢ :

$\therefore ع_2 = جتا\frac{٥\pi}{٤} + ت\,جا\frac{٥\pi}{٤} = -\frac{\sqrt{٢}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢}ت$

عند ن = ٣ :

$\therefore ع_3 = جتا\frac{٧\pi}{٤} + ت\,جا\frac{٧\pi}{٤} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢}ت$

⑤ $ع_5^5 = ١ = جتا\,٠ + ت\,جا\,٠$

$\therefore ع = (جتا\frac{٢\pi ن}{٥} + ت\,جا\frac{٢\pi ن}{٥})$

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

عند ن = ٠ :

$\therefore ع_0 = جتا\,٠ + ت\,جا\,٠ = ١$

عند ن = ١ :

$\therefore ع_1 = جتا\frac{٢\pi}{٥} + ت\,جا\frac{٢\pi}{٥}$

عند ن = ٢ :

$\therefore ع_2 = جتا\frac{٤\pi}{٥} + ت\,جا\frac{٤\pi}{٥}$

عند ن = ٣ :

$\therefore ع_3 = جتا\frac{٦\pi}{٥} + ت\,جا\frac{٦\pi}{٥}$

$= جتا(\pi + \frac{\pi}{٥}) + ت\,جا(\pi + \frac{\pi}{٥})$

$= -جتا\frac{\pi}{٥} - ت\,جا\frac{\pi}{٥}$

عند ن = ٤ :

$\therefore ع_4 = جتا\frac{٨\pi}{٥} + ت\,جا\frac{٨\pi}{٥}$

$= جتا(\pi + \frac{٣\pi}{٥}) + ت\,جا(\pi + \frac{٣\pi}{٥})$

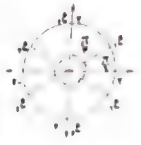
$= -جتا\frac{٣\pi}{٥} - ت\,جا\frac{٣\pi}{٥}$

⑥ $ع_6^6 = -٦٤ = ٦٤(جتا\pi + ت\,جا\pi)$

$\therefore ع = ٢(جتا\frac{\pi + ٢\pi ن}{٦} + ت\,جا\frac{\pi + ٢\pi ن}{٦})$

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

عند ن = ٠ : $\therefore ع_0 = ٢(جتا\frac{\pi}{٦} + ت\,جا\frac{\pi}{٦})$



عند ن = ١ : $\therefore ع_1 = ٢(جتا\frac{\pi}{٢} + ت\,جا\frac{\pi}{٢})$

عند ن = ٢ : $\therefore ع_2 = ٢(جتا\frac{٥\pi}{٦} + ت\,جا\frac{٥\pi}{٦})$

عند ن = ٣ :

$\therefore ع_3 = ٢(جتا\frac{٧\pi}{٦} + ت\,جا\frac{٧\pi}{٦})$

$= ٢(-جتا\frac{\pi}{٦} - ت\,جا\frac{\pi}{٦})$

عند ن = ٤ :

$\therefore ع_4 = ٢(جتا\frac{١١\pi}{٦} + ت\,جا\frac{١١\pi}{٦})$

$= ٢(-جتا\frac{\pi}{٢} - ت\,جا\frac{\pi}{٢})$

⑦ نفرض أن $ع_7^7 = ١١ - ٦ت = ١٢(جتا\frac{\pi}{٣} - ت\,جا\frac{\pi}{٣})$

$\therefore ع = ٢(جتا\frac{\frac{\pi}{٣} + ٢\pi ن}{٧} + ت\,جا\frac{\frac{\pi}{٣} + ٢\pi ن}{٧})$

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

عند ن = ٠ : $\therefore ع_0 = ٢(جتا\frac{\pi}{٢١} + ت\,جا\frac{\pi}{٢١})$

عند ن = ١ : $\therefore ع_1 = ٢(جتا\frac{\pi}{٣} + ت\,جا\frac{\pi}{٣})$

عند ن = ٢ : $\therefore ع_2 = ٢(جتا\frac{\pi}{٧} + ت\,جا\frac{\pi}{٧})$

عند ن = ٣ : $\therefore ع_3 = ٢(جتا\frac{\pi}{٢} + ت\,جا\frac{\pi}{٢})$

عند ن = ٤ : $\therefore ع_4 = ٢(جتا\frac{٥\pi}{٧} + ت\,جا\frac{٥\pi}{٧})$

عند ن = ٥ : $\therefore ع_5 = ٢(جتا\frac{٦\pi}{٧} + ت\,جا\frac{٦\pi}{٧})$

عند ن = ٦ : $\therefore ع_6 = ٢(جتا\frac{\pi}{٣} + ت\,جا\frac{\pi}{٣})$

⑧ $ع_8^8 = ٨٠ - ٠$

$\therefore ع_8^8 = ٨(جتا\pi + ت\,جا\pi)$

٢

① نفرض أن $ع_1^2 = ٨ = ٨(جتا\,٠ + ت\,جا\,٠)$

$\therefore ع = ٢(جتا\frac{٢\pi ن}{٢} + ت\,جا\frac{٢\pi ن}{٢})$

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢

عند ن = ٠ :

$\therefore ع_0 = ٢(جتا\,٠ + ت\,جا\,٠)$

عند ن = ١ : $\therefore ع_1 = ٢(جتا\frac{\pi}{٢} + ت\,جا\frac{\pi}{٢})$

عند ن = ٢ :

$\therefore ع_2 = ٢(جتا\frac{٣\pi}{٢} + ت\,جا\frac{٣\pi}{٢})$

$- ٢(جتا\frac{\pi}{٢} + ت\,جا\frac{\pi}{٢})$

② نفرض أن $ع_2^2 = ٢٢ - ٢٢(جتا\pi + ت\,جا\pi)$

$\therefore ع = ٢(جتا\frac{\pi + ٢\pi ن}{٥} + ت\,جا\frac{\pi + ٢\pi ن}{٥})$

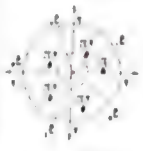
حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

عند ن = ٠ : $\therefore ع_0 = ٢(جتا\frac{\pi}{٥} + ت\,جا\frac{\pi}{٥})$

عند ن = ١ : $\therefore ع_1 = ٢(جتا\frac{٣\pi}{٥} + ت\,جا\frac{٣\pi}{٥})$

عند ن = ٢ : $\therefore ع_2 = ٢(جتا\pi + ت\,جا\pi)$

عند ن = ٣ :



$\therefore ع_3 = ٢(جتا\frac{٧\pi}{٥} + ت\,جا\frac{٧\pi}{٥})$

$- ٢(جتا\frac{\pi}{٥} + ت\,جا\frac{\pi}{٥})$

عند ن = ٤ :

$\therefore ع_4 = ٢(جتا\frac{٩\pi}{٥} + ت\,جا\frac{٩\pi}{٥})$

$- ٢(جتا\frac{٢\pi}{٥} + ت\,جا\frac{٢\pi}{٥})$

③ نفرض أن $ع_3^3 = -١٦ = ١٦(جتا\pi + ت\,جا\pi)$

$\therefore ع = ٢(جتا\frac{\pi + ٢\pi ن}{٤} + ت\,جا\frac{\pi + ٢\pi ن}{٤})$

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

عند ن = ٠ : $\therefore ع_0 = ٢(جتا\frac{\pi}{٤} + ت\,جا\frac{\pi}{٤})$

عند ن = ١ : $\therefore ع_1 = ٢(جتا\frac{٣\pi}{٤} + ت\,جا\frac{٣\pi}{٤})$

عند ن = ٢ : $\therefore ع_2 = ٢(جتا\frac{٥\pi}{٤} + ت\,جا\frac{٥\pi}{٤})$

عند ن = ٣ :

$\therefore ع_3 = ٢(جتا\frac{٧\pi}{٤} + ت\,جا\frac{٧\pi}{٤})$

$= ٢(جتا\frac{-\pi}{٤} + ت\,جا\frac{-\pi}{٤})$

عند ن = ٤ :

$\therefore ع_4 = ٢(جتا\frac{٩\pi}{٤} + ت\,جا\frac{٩\pi}{٤})$

$= ٢(جتا\frac{\pi}{٤} + ت\,جا\frac{\pi}{٤})$

عند ن = ٥ :

$\therefore ع_5 = ٢(جتا\frac{١١\pi}{٤} + ت\,جا\frac{١١\pi}{٤})$

$- ٢(جتا\frac{-\pi}{٤} + ت\,جا\frac{-\pi}{٤})$

④ نفرض أن $ع_4^4 = ١١ - ٠ = ١١(جتا\frac{\pi}{٢} + ت\,جا\frac{\pi}{٢})$

$\therefore ع = ٢(جتا\frac{\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن}{٤} + ت\,جا\frac{\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن}{٤})$

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

∴ θ تقع فى الربع الرابع.

∴ θ = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right)$ = $-60° = -\frac{\pi}{3}$

∴ ع$_1$ = ٢ (جتا $\frac{-\pi}{3}$ + ت جا $\frac{-\pi}{3}$)

ع$_2$ = (جتا $\frac{\pi}{4}$ − ت جا $\frac{\pi}{4}$)$^{\frac{1}{2}}$ = (جتا $\frac{-\pi}{4}$ + ت جا $\frac{-\pi}{4}$)$^{\frac{1}{2}}$

= جتا (−هـ) + ت جا (−هـ)

∴ ع = $\frac{(٢ (جتا $\frac{-\pi}{3}$ + ت جا $\frac{-\pi}{3}$))(جتا هـ + ت جا هـ)}{جتا (−هـ) + ت جا (−هـ)}$

= $\frac{٢ [جتا (هـ − $\frac{\pi}{3}$) + ت جا (هـ − $\frac{\pi}{3}$)]}{جتا (−هـ) + ت جا (−هـ)}$

= ٢ (جتا (٢ هـ − $\frac{\pi}{3}$) + ت جا (٢ هـ − $\frac{\pi}{3}$))

عند هـ = $\frac{\pi}{3}$ ع = ٢ (جتا ٠ + ت جا ٠)

الجذور التربيعية للعدد ع

= $\sqrt{2}$ (جتا $\frac{٢٠ + ٢ \pi ن}{2}$ + ت جا $\frac{٢٠ + ٢ \pi ن}{2}$)

حيث ن = ٠ ، ١

عند ن = ٠ الجذر التربيعى الأول للعدد ع

= $\sqrt{2}$ (جتا ١٠ + ت جا ١٠)

عند ن = ١ الجذر التربيعى الثانى للعدد ع

= $\sqrt{2}$ (جتا π + ت جا π)

٣٠

ع$_1$ = ٢ (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$) = ٢ (جتا $\frac{\pi}{3}$ − $\frac{\pi}{3}$)

+ ت جا (−$\frac{\pi}{3}$ − $\frac{\pi}{3}$))

، ع$_2$ = $\sqrt{2}$ (جتا $\frac{\pi}{4}$ − ت جا $\frac{\pi}{4}$)

= $\sqrt{2}$ (جتا ($\frac{\pi}{3}$ + $\frac{\pi}{4}$) + ت جا ($\frac{\pi}{3}$ + $\frac{\pi}{4}$))

= $\sqrt{2}$ (جتا $\frac{٧ \pi}{12}$ + ت جا $\frac{٧ \pi}{12}$)

= $\sqrt{2}$ (جتا $\frac{-\pi}{12}$ + ت جا $\frac{-\pi}{12}$)

∴ ع$_1$ = ١ + $\sqrt{3}$ ت

∴ ل = $\sqrt{(١)^2 + (\sqrt{3})^2}$ = ٢

∵ س < ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الأول.

∴ θ = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$ = $60° = \frac{\pi}{3}$

∴ ع$_1$ = ٢ (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$)

ع$_2$ = $\frac{[٢ (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$)]^{\frac{1}{2}} \cdot [\sqrt{2} (جتا $\frac{-\pi}{4}$ + ت جا $\frac{-\pi}{4}$)]^{\frac{1}{2}}}{[٢ (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$)]^{\frac{1}{2}}}$

= $\frac{٨ (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$) \times ٤ (جتا (−π) + ت جا (−π))}{٢٢ (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$)}$

= جتا $\frac{-١٢ \pi}{6}$ + ت جا $\frac{-١٢ \pi}{6}$

= جتا $\frac{-\pi}{6}$ + ت جا $\frac{-\pi}{6}$ = هـ$^{\frac{-\pi}{6}}$

الجذور التربيعية للعدد ع

= جتا $\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + ٢ \pi ن}{2}\right)$ + ت جا $\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + ٢ \pi ن}{2}\right)$

حيث ن = ٠ ، ١

عند ن = ٠

∴ الجذر التربيعى الأول للعدد ع

= جتا $(\frac{-\pi}{12})$ + ت جا $(\frac{-\pi}{12})$

عند ن = ١

∴ الجذر التربيعى الثانى للعدد ع

= جتا $(\frac{١١ \pi}{12})$ + ت جا $(\frac{١١ \pi}{12})$

٣١

ع$_1$ = ١ + $\sqrt{3}$ ت

∴ ل = $\sqrt{(١)^2 + (\sqrt{3})^2}$ = ٢

∵ س < ٠ ، ص > ٠

∴ θ تقع فى الربع الثانى.

∴ θ = π + ظا$^{-1}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$ = $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{٢ \pi}{3}$

∴ ع$_1$ = ٢ (جتا $\frac{٢ \pi}{3}$ + ت جا $\frac{٢ \pi}{3}$)

∴ ع$_1^{11}$ = ٢^{11} (جتا $\frac{٢٢ \pi}{3}$ + ت جا $\frac{٢٢ \pi}{3}$)

= ٢٠٤٨ (جتا $\frac{-\pi}{3}$ + ت جا $\frac{-\pi}{3}$)

ع$_2^6$ = ٥١٢ = ٥١٢ (جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$)

ع = $\frac{٢ (جتا $\frac{\pi}{2}$) + ت جا $\frac{\pi}{2}$) \cdot ٢٠٤٨ [جتا ($\frac{-٢٢ \pi}{3}$) + ت جا ($\frac{-٢٢ \pi}{3}$)]}{٥١٢ (جتا $\frac{\pi}{2}$) + ت جا $\frac{\pi}{2}$)}$

= ٨ (جتا ($\frac{\pi}{2}$ + $\frac{-٢٢ \pi}{3}$ − $\frac{\pi}{2}$)

+ ت جا ($\frac{\pi}{2}$ + $\frac{-٢٢ \pi}{3}$ − $\frac{\pi}{2}$))

= ٨ [جتا (−π) + ت جا (−π)] = ٨ (جتا π + ت جا π)

سعة ع = π ، |ع| = ٨

، $\sqrt{2}$ ع = ٢ (جتا $\frac{\pi + ٢ \pi ن}{2}$

+ ت جا $\frac{\pi + ٢ \pi ن}{2}$))

حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢

عند ن = ٠

∴ الجذر التكعيبى الأول للعدد ع

= ٢ (جتا $\frac{\pi}{6}$ + ت جا $\frac{\pi}{6}$)

عند ن = ١

∴ الجذر التكعيبى الثانى للعدد ع = ٢ (جتا π + ت جا π)

عند ن = ٢

∴ الجذر التكعيبى الثالث للعدد ع

= ٢ (جتا $\frac{٥ \pi}{6}$ + ت جا $\frac{٥ \pi}{6}$)

٣٢

$\sqrt{\frac{١٨ + ت}{٢ + ٢ ت}} \times \frac{٢ - ٢ ت}{٢ - ٢ ت}$ = $\sqrt{٣ - ٤ ت}$

= س + ت ص بتربيع الطرفين.

∴ ٣ − ٤ ت = س^2 − ص^2 + ٢ س ص ت

∴ س^2 − ص^2 = ٣ (١) ، ٢ س ص = −٤ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع

∴ س^2 + ص^2 = ٥ (٣)

بجمع (١) ، (٣) ∴ ٢ س^2 = ٨

∴ س^2 = ٤ ∴ س = ± ٢

، بطرح (١) ، (٣) ∴ ٢ ص^2 = ٢

∴ ص^2 = ١ ∴ ص = ± ١

، من (٢) ∵ س ص < ٠

∴ س + ت ص = ± (٢ − ت)

أى أن س = ± ٢ ، ص = ∓ ١

٣٣

① (س + ت ص)^2 = $\frac{-٣ - ٢ ت}{٢ - ت} \times \frac{٢ + ت}{٢ + ت}$ = $\frac{-٨ - ٧ ت}{٥}$

= −٨ − ٧ ت

∴ س^2 − ص^2 + ٢ س ص ت = −٨ − ٧ ت

∴ س^2 − ص^2 = −٨ (١) ، ٢ س ص = −٧ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع

∴ س^2 + ص^2 = ١٠ (٣)

بجمع (١) ، (٣) ∴ ٢ س^2 = ٢

∴ س^2 = ١ ∴ س = ± ١

، بطرح (١) ، (٣) ∴ ٢ ص^2 = ١٨

∴ ص^2 = ٩ ∴ ص = ± ٣

، من (٢) ∵ س ص < ٠

∴ س = ١ ، ص = −٣ أو س = −١ ، ص = ٣

∴ مجموعة الحل = {(١ ، −٣) ، (−١ ، ٣)}

② (س + ت ص)^2 (١ + ت) + ٧ − ت = ٠

∴ (س + ت ص)^2 = $\frac{-٧ + ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت}$

= ٣ − ٤ ت

∴ س^2 − ص^2 + ٢ س ص ت = ٣ − ٤ ت

∴ س^2 − ص^2 = ٣ (١)

، ٢ س ص = −٤

∴ ص = $\frac{-٢}{س}$ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

∴ س^2 − $\left(\frac{-٢}{س}\right)^2$ = ٣

∴ س^4 − ٣ س^2 − ٤ = ٠

∴ (س^2 + ١) (س^2 − ٤) = ٠

∴ س^2 = −١ (مرفوض) ، س^2 = ٤

∴ س = ± ٢

وبالتعويض فى (٢) ∴ ص = ∓ ١

③ (س + ت ص)^2 (١ + ٢ ت) − ١١ + ٢ ت = ٠

∴ (س + ت ص)^2 = $\frac{١١ - ٢ ت}{١ + ٢ ت} \times \frac{١ - ٢ ت}{١ - ٢ ت}$

= $\frac{-٣ - ٢٤ ت}{٥}$

∴ س^2 − ص^2 + ٢ س ص ت = $\frac{-٣}{٥} - \frac{٢٤}{٥}$ ت

∴ س^2 − ص^2 = $\frac{-٣}{٥}$ (١)

، ٢ س ص = $\frac{-٢٤}{٥}$

∴ ص = $\frac{-١٢}{٥ س}$ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

∴ س^2 − $\left(\frac{-١٢}{٥ س}\right)^2$ = $\frac{-٣}{٥}$

∴ ٢٥ س^4 − ١٤٤ = −٣ س^2

∴ ٢٥ س^4 + ٣ س^2 − ١٤٤ = ٠

∴ (٥ س^2 − ٩) (٥ س^2 + ١٦) = ٠

∴ ٥ س^2 = ٩ (٥ س^2 = −١٦ مرفوض)

∴ س^2 = $\frac{٩}{٥}$ ∴ س = ± $\frac{٣}{\sqrt{5}}$

، من (٢) ∵ س ص < ٠

∴ س = $\frac{٣}{\sqrt{5}}$ ، ص = $\frac{-٤}{\sqrt{5}}$ أو س = $\frac{-٣}{\sqrt{5}}$ ، ص = $\frac{٤}{\sqrt{5}}$

∴ مجموعة الحل = {($\frac{٣}{\sqrt{5}}$ ، $\frac{-٤}{\sqrt{5}}$) ، ($\frac{-٣}{\sqrt{5}}$ ، $\frac{٤}{\sqrt{5}}$)}

٣٤

① (س + ت ص)^2 − ١٠ (س + ت ص) + ٤١ = ٠

نفرض أن ك = س + ت ص

∴ ك^2 − ١٠ ك + ٤١ = ٠

أ = ١ ، ب = −١٠ ، جـ = ٤١

∴ ك = $\frac{١٠ \pm \sqrt{(-١٠)^2 - 4 (١) (٤١)}}{2 (١)}$ = ٥ ± ٤ ت

∴ س + ت ص = ٥ ± ٤ ت

∴ س = ٥ ، ص = ± ٤

٣٥

① (س + ت ص)^2 (١ + ت) + ٧ − ت = ٠

∴ (س + ت ص)^2 = $\frac{-٧ + ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت}$

= −٣ + ٤ ت

∴ س^2 − ص^2 + ٢ س ص ت = −٣ + ٤ ت

∴ س^2 − ص^2 = −٣ (١)

، ٢ س ص = ٤

∴ ص = $\frac{٢}{س}$ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

∴ س^2 − $\left(\frac{٢}{س}\right)^2$ = −٣

∴ س^4 + ٣ س^2 − ٤ = ٠

∴ (س^2 + ٤) (س^2 − ١) = ٠

∴ س^2 = −٤ (مرفوض) ، س^2 = ١

∴ س = ± ١

وبالتعويض فى (٢) ∴ ص = ± ٢

② (س + ت ص)^2 (١ + ٢ ت) − ١١ + ٢ ت = ٠

∴ (س + ت ص)^2 = $\frac{١١ - ٢ ت}{١ + ٢ ت} \times \frac{١ - ٢ ت}{١ - ٢ ت}$

= $\frac{-٣ - ٢٤ ت}{٥}$

∴ س^2 − ص^2 + ٢ س ص ت = $\frac{-٣}{٥} - \frac{٢٤}{٥}$ ت

∴ س^2 − ص^2 = $\frac{-٣}{٥}$ (١)

، ٢ س ص = $\frac{-٢٤}{٥}$

∴ ص = $\frac{-١٢}{٥ س}$ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

∴ س^2 − $\left(\frac{-١٢}{٥ س}\right)^2$ = $\frac{-٣}{٥}$

∴ ٢٥ س^4 − ١٤٤ = −٣ س^2

∴ ٢٥ س^4 + ٣ س^2 − ١٤٤ = ٠

∴ (٥ س^2 − ٩) (٥ س^2 + ١٦) = ٠

∴ ٥ س^2 = ٩ (٥ س^2 = −١٦ مرفوض)

∴ س^2 = $\frac{٩}{٥}$ ∴ س = ± $\frac{٣}{\sqrt{5}}$

، من (٢) ∵ س ص < ٠

∴ س = $\frac{٣}{\sqrt{5}}$ ، ص = $\frac{-٤}{\sqrt{5}}$ أو س = $\frac{-٣}{\sqrt{5}}$ ، ص = $\frac{٤}{\sqrt{5}}$

∴ مجموعة الحل = {($\frac{٣}{\sqrt{5}}$ ، $\frac{-٤}{\sqrt{5}}$) ، ($\frac{-٣}{\sqrt{5}}$ ، $\frac{٤}{\sqrt{5}}$)}

(١٢) الطرف الأيمن

$= \left(\frac{٢ + ٥ ω + ٢ ω^٢}{٢ ω - ٢ ω^٢ ...} + \frac{٢ ω + ٤ + ٢ ω^٢}{ω ٤ - ω^٢ ...} \right)$

$= \frac{٢ ω + ٥}{(ω - ١)(٢ ω^٢ ...)}$

$= \frac{٢ ω^٢}{ω ٤ + ١ + ω^٢ ٢ - ١}$

$= \frac{ω^٢ ٢}{ω ٥ + ٢ ω} + \frac{ω^٢ ٢}{ω + ٥}$

$= \frac{ω (٥ + ٢ ω^٢) + ٢ ω^٢ (٥ + ٢ ω)}{(٥ + ٢ ω)(٥ + ٢ ω^٢)}$

$= \frac{١٠ ω + ٤ ω^٢ + ١٠ ω^٢ + ٤}{٢٥ + ١٠ ω^٢ + ١٠ ω + ٤}$

$= \frac{١٠ (-١) + ٤}{٢٩ + ١٠ (-١)} = \frac{-٦}{١٩}$ = الطرف الأيسر.

(١٣) الطرف الأيمن

$= \left(\frac{٢ + ω^٢ + ٢ + ٢ ω}{ω - ٢} + \frac{ω - ١}{١ + ω + ٢ + ٢ ω^٢} \right)^٢$

$= \left(\frac{٢ ω + ω^٢ ٢}{ω - ٢} + \frac{ω - ١}{١ + ω - ٢ ω} \right)^٢$

$= \left(\frac{٢ - ω}{٢ - ω} + \frac{ω - ١}{ω - ١} \right)^٢$

$= (١ - ١٠)^٢ = ٤$ = الطرف الأيسر.

(١٤) الطرف الأيمن

$= \frac{٥ + ٣ ω^٢}{ω - ٣} + \frac{٥ + ٣ ω}{ω^٢ - ٣}$

$= \frac{(ω^٢ - ٣)(٥ + ٣ ω^٢) + (ω - ٣)(٥ + ٣ ω)}{(ω - ٣)(ω^٢ - ٣)}$

$= \frac{٥ ω^٢ + ٣ ω^٤ - ١٥ - ٩ ω^٢ + ٥ ω + ٣ ω^٢ - ١٥ - ٩ ω}{ω^٣ - ٣ ω^٢ - ٣ ω + ٩}$

$= \frac{٢ - ٣ ω - ٣ ω^٢}{٢ + ٥}, \frac{٢ - ٢ - ٣}{٢ + ٥} = \frac{٣٢}{٧}$

$= \frac{٣٢}{٧}$ = الطرف الأيسر

(١٥) الطرف الأيمن $= (٥ + ٤ ω)^٢ \times (٥ + ٤ ω^٢)^٢$

$= [(٥ + ٤ ω)(٥ + ٤ ω^٢)]^٢$

$= (٢٥ + ٢٠ ω^٢ + ٢٠ ω + ١٦)^٢$

$= (٤١ + ٢٠ (-١))^٢$

$= (٢١)^٢ = ٤٤١$ = الطرف الأيسر.

(١٦) الطرف الأيمن

$= \left(\frac{ω}{٢ + ٣ ω} - \frac{ω^٢}{٢ + ٣ ω^٢} \right)^٢$

$= \left(\frac{ω (٢ + ٣ ω^٢) - ω^٢ (٢ + ٣ ω)}{(٢ + ٣ ω)(٢ + ٣ ω^٢)} \right)^٢$

$= \left(\frac{٢ ω + ٣ ω^٣ - ٢ ω^٢ - ٣ ω^٣}{٤ + ٦ ω + ٦ ω^٢ + ٩} \right)^٢$

$= \left(\frac{٢ (ω - ω^٢)}{١٣ + ٦ (-١)} \right)^٢ = \left(\frac{٢ \sqrt{٣} \, ت}{٧} \right)^٢$

$= \frac{-١٢}{٤٩}$ = الطرف الأيسر.

(١٧) الطرف الأيمن

$= \left(\frac{١}{١ + ٢ ω^٢} - \frac{١}{١ + ٢ ω} \right)^٢$

$= \left(\frac{(١ + ٢ ω) - (١ + ٢ ω^٢)}{(١ + ٢ ω^٢)(١ + ٢ ω)} \right)^٢$

$= \left(\frac{٢ ω - ٢ ω^٢}{١ + ٢ ω + ٢ ω^٢ + ٤} \right)^٢$

$= \left(\frac{٢ (ω - ω^٢)}{٥ + ٢ (-١)} \right)^٢ = \left(\frac{٢ \sqrt{٣} \, ت}{٣} \right)^٢$

$= \frac{١٢ \times -١}{٩} = \frac{-٤}{٣}$ = الطرف الأيسر.

(١٨) الطرف الأيمن

$= (٥ + ω) \left(\frac{١}{٢ + ω} - \frac{١}{٣ ω + ٢ ω^٢} \right)$

$= (٥ + ω) \left(\frac{١}{٢ + ω} - \frac{١}{ω (٣ + ٢ ω)} \right)$

$= (٥ + ω) \left(\frac{١}{٢ + ω} - \frac{١}{ω - ٢} \right)$

$= (٥ + ω) \left(\frac{١}{٢ + ω} + \frac{١}{٢ - ω} \right)$

$= (٥ + ω) \left(\frac{٢ - ω + ٢ + ω}{(٢ - ω)(٢ + ω)} \right)$

$= (٥ + ω) \left(\frac{٤}{ω - ٤} \right)$

$= (٥ + ω) \left(\frac{٤}{٤ - ١ - ω} \right) = \left(\frac{٤ \times (٥ + ω)}{٥ + ω} \right)$

$= ٤$ = الطرف الأيسر.

(١٩) الطرف الأيمن $= \left(٥ - \frac{٥}{١ + ω} + \frac{٢}{ω^٢} \right)^٢$

$= \left(٥ - \frac{٥}{ω} + \frac{٢}{ω^٢} \right)^٢$

$= (٥ + ٥ ω^٢ + ٢ ω)^٢$

$= (-٥ ω + ٢ ω)^٢ = (-٣ ω)^٢$

$= ٩ ω^٢ = ٩ ω^٢$ = الطرف الأيسر.

(٢٠) الطرف الأيمن

$= \left(\frac{١٢}{١٢ ω^٢} - \frac{ω ٣}{٣ - ω} \cdot \frac{١٧}{١٧ ω} - \frac{ω ١٤}{١٤} \right)^{٢ ١}$

$= \left(\frac{ω^٢ (١٢ - ω ٣)}{(١٢ ω - ٣)} - \frac{ω (١٧ ω^٢ - ١٤)}{(١٧ ω^٢ - ١٤)} \right)^{٢ ١}$

$= (ω^٢ - ω)^{٢ ١} = [(\sqrt{٣} \, ت)^٢]^٣$

$= -٩^٣ = ٣^٢ ٢$ = الطرف الأيسر.

(٢١) الطرف الأيمن

$\frac{س + ω ص}{ω^٢ س + ص}, \frac{ع ω^٢ + ل}{ع + ω ل}$

$= \frac{ω (س ω^٢ + ص)}{(س + ω^٢ ص)} + \frac{ω^٢ (ع + ω ل)}{(ع + ω ل)}$

$= ω + ω^٢ = -١$ = الطرف الأيسر.

(٢٢) الطرف الأيمن

$\left(\frac{أ + ب ω + جـ ω^٢}{ω^٢ أ + ب + جـ ω} - \frac{جـ + أ ω^٢ + ب ω}{ب + أ ω + جـ ω^٢} \right)^٨$

$\frac{ω^٢ (أ + ب ω + جـ ω^٢)}{(أ + ب ω^٢ + جـ ω)}$

$= (ω - ω^٢)^٨ = ((\sqrt{٣} \, ت)^٢)^٤$

$= (٣)^٤ = ٨١$ = الطرف الأيسر.

(٢٣) الطرف الأيمن

$= \left(ص + \frac{س}{ω} \right) \left(س + \frac{ص}{ω} \right)$

$= (ص + س ω^٢)(س + ص ω)$

$= س ص + ص^٢ ω + س^٢ ω^٢ + س ص ω^٣$

$= س ص + ص^٢ ω + س^٢ ω^٢ + س ص$

$= س^٢ + س ص (ω + ω^٢) + ص^٢$

$= س^٢ - س ص + ص^٢$

$= س^٢ - ٢ س ص + ص^٢ + س ص$

$= (س - ص)^٢ + س ص$ = الطرف الأيسر.

(٢٤) الطرف الأيمن

$= (أ + ب ω + أ ω^٢)(أ + ب ω^٢ + أ ω^٤)$

$= (ب + أ (-ω))(ب + أ (-ω^٢))$

$= (ب - أ) ω \times (ب - أ) ω^٢$

$= ω^٣ (ب - أ)^٢ = (ب - أ)^٢$ = الطرف الأيسر.

٥

(١) الطرف الأيمن

$= (١ + ω)(١ + ω^٢)(١ + ω^٣)(١ + ω^٤)$

$(١ + ω^٥)$

$(١ + ω)(١ + ω^٢)(١ + ١)(١ + ω)$

$(١ + ω^٢)$

$= (-ω^٢)(-ω)(٢)(-ω^٢)(-ω)$

$= ٢ ω^٦ = ٢$ = الطرف الأيسر

(٢) الطرف الأيمن

$(١ - ω)(١ - ω^٢)(١ - ω^٤)(١ - ω^٥)$

إجابات تمارين ١٥

١

① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (أ) ⑤ (أ)
⑥ (د) ⑦ (د) ⑧ (أ) ⑨ (جـ) ⑩ (ب)
⑪ (ب) ⑫ (أ) ⑬ (أ) ⑭ (أ) ⑮ (د)
⑯ (د) ⑰ (جـ) ⑱ (ب) ⑲ (أ) ⑳ (د)
㉑ (د) ㉒ (د) ㉓ (ب) ㉔ (أ) ㉕ (جـ)
㉖ (أ) ㉗ (د) ㉘ (جـ) ㉙ (ب) ㉚ (جـ)

٢

① $\begin{vmatrix} ٦١٥ & ٦١٦ \\ ٦١٧ & ٦١٨ \end{vmatrix}$ بإجراء (صـ٢ − صـ١)

$= \begin{vmatrix} ٦١٥ & ٦١٦ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ (بأخذ ٢ مشترك من صـ٢)

$= ٢ \begin{vmatrix} ٦١٥ & ٦١٦ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}$

بإجراء (ع١ − ع٢)

$= ٢ \begin{vmatrix} ١- & ٦١٦ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \times ١- = ٢-$

② $\begin{vmatrix} ١٩٨٥ & ١٩٨٤ \\ ١٩٨٧ & ١٩٨٦ \end{vmatrix}$ بإجراء (صـ٢ − صـ١)

$= \begin{vmatrix} ١٩٨٥ & ١٩٨٤ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ بأخذ (٢) مشترك من صـ٢

$= ٢ \begin{vmatrix} ١٩٨٥ & ١٩٨٤ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}$ بإجراء (ع١ − ع٢)

$= ٢ \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \times ١ = ٢$

③ $\begin{vmatrix} ٥- & ٣ & ٥ \\ ٦ & ٤- & ١- \end{vmatrix}$ بإجراء (ع١ + ع٢)

$= \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٢- \\ ٥ & ٣ & ٠ \\ ١- & ٤ & ٥ \end{vmatrix}$ تبديل صـ١ ، صـ٣

$= - \begin{vmatrix} ١- & ٤ & ٥ \\ ٥ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢- \end{vmatrix}$

$= -(٥ \times ٣ \times ٢-) = ٣٠$

④ $\begin{vmatrix} ٥ & ١- & ١٠ \\ ٤ & ٢ & ٨ \\ ٥- & ٢ & ١٠- \end{vmatrix}$ بأخذ مشترك (٢) من ع٣

$= ٢ \begin{vmatrix} ٥ & ١- & ٥ \\ ٤ & ٢ & ٤ \\ ٥- & ٢ & ٥- \end{vmatrix}$ = ٢ × صفر = صفر

لأن (ع١ = ع٣)

⑤ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣- & ١- \\ ٤- & ٦ & ٢ \end{vmatrix}$ بإجراء (ع٣ − ع١)

$= \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣- & ١- \\ ٢ & ٦ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر (لأن ع١ = ع٣)

⑥ $\begin{vmatrix} ٧٦ & ٧٨ & ٨٠ \\ ٨٢ & ٨٨ & ٩٤ \\ ٨٦ & ٩٦ & ١٠٦ \end{vmatrix}$ بإجراء (ع٢ − ع١)

ثم (ع٣ − ع١)

$= \begin{vmatrix} ٧٦ & ٢ & ٢ \\ ٨٢ & ٦ & ٦ \\ ٨٦ & ١٠ & ١٠ \end{vmatrix}$ = صفر (لأن ع٢ = ع٣)

⑦ $\begin{vmatrix} ٦ & ٤ & ٥ \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ١- & ٢- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ + ٥ & ٤ & ٥ \\ ٣ + ٢ & ٣ & ٢ \\ ٥ - ٢ & ١- & ٢- \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ١- & ٢- \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٥ & ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ٣- & ١- & ٢- \end{vmatrix}$

لاحظ أن المحدد الثانى = صفر لأن (ع١ = ع٣)

٤

$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & ١١ & ٢ \\ ١ & ٣ & ٥ \\ ٣ & ٢ & ٢- \end{vmatrix}$ تبديل صـ٣ مع صـ١

$= - \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٤ & ١١ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٢- \end{vmatrix}$

بإجراء (صـ٢ − ٤ صـ١) ثم (صـ٣ − ٣ صـ١)

$= - \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٠ & ١- & ١٨- \\ ٠ & ٧- & ١٧- \end{vmatrix}$ بإجراء (صـ٣ − ٧ صـ٢)

$= - \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٠ & ١- & ١٨- \\ ٠ & ١٠٩ & ٠ \end{vmatrix} = -(١ \times ١- \times ١٠٩) = ١٠٩$

٥

① $\begin{vmatrix} ٣- & ٢ & ٥ \\ ٤ & ٠ & ٦- \\ ٧ & ٩ & ٨ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣- & ٨- & ٥ \\ ٤ & ٨ & ٦- \\ ٧ & ٥ & ٨ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ٣- & ٦- & ٥ \\ ٤ & ٨ & ٦- \\ ٧ & ١٤ & ٨ \end{vmatrix}$ بأخذ مشترك (٢) من ع٣

$= \begin{vmatrix} ٣- & ٦- & ٥ \\ ٤ & ٨ & ٦- \\ ٧ & ١٤ & ٨ \end{vmatrix}$ = ٢ × صفر = صفر

لأن (ع١ = ع٣)

② $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٨ & ٤- & ١٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٢- & ١ & ٣- \\ ١٢ & ٣٠ & ٢٤ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٨ & ٤- & ١٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢- & ١ & ٣- \\ ١٢ & ٣٠ & ٢٤ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$

تبديل صـ٣ ، صـ٢ فى المحدد الثانى

$= \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٨ & ٤- & ١٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٨- & ٤ & ١٢- \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$

بأخذ ٤ مشترك من ص١ ثم ضرب ٤ × صـ٣

$= \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$ = صفر (جميع عناصر صـ٣ = ٠)

③ $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ٥- & ١- & ٧- \\ ١ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} \frac{١}{٤} + \begin{vmatrix} ٤ & ٦ & ٢ \\ ٨ & ٦ & ١٠ \\ ٦ & ٩ & ٤ \end{vmatrix}$

(بتدوير المحدد الأول) ، (أخذ ٢ مشترك من ع١ ،

٢ مشترك من ع٣ من المحدد الثانى)

$= \begin{vmatrix} ٢ & ٥- & ١ \\ ٤ & ١- & ٥ \\ ٣ & ٧- & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٦ & ١ \\ ٤ & ٦ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ٢ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٥ \\ ٣ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر (لأن ع٢ = ع٣)

④ الأيمن = $\begin{vmatrix} س ح & ح^{٢} & ب س^{٢} \\ ح^{٢} & ح ا & ا^{٢} \\ س^{٢} & ا^{٢} & ا ب \end{vmatrix}$

بأخذ (س ح من ع$_{١}$ ، ا ح من ع$_{٢}$ ، ا ب من ع$_{٣}$)

$= س ح \times ا ح \times ا ب \begin{vmatrix} ١ & \frac{ح}{س} & \frac{ب}{س} \\ \frac{ح}{س} & ١ & \frac{ا}{س} \\ \frac{ب}{س} & \frac{ا}{ح} & ١ \end{vmatrix}$

٢ × ص ، ب × ص$_{م}$ ، ح × ص$_{م}$

$= ٢ ا ب ح \begin{vmatrix} ا & ح & ب \\ ح & ا & ب \\ ب & ا & ح \end{vmatrix}$ = الأيسر

⑤ الأيمن = $\begin{vmatrix} ب ح & ا^{٢} & ح^{٢} \\ ب^{٢} & ح ا & ا^{٢} \\ ح^{٢} & ح ا & ا ب \end{vmatrix}$

بأخذ (ب ح من ع$_{١}$ ، ا ح من ع$_{٢}$ ، ا ب من ع$_{٣}$)

$= ا^{٢} ب^{٢} ح^{٢} \begin{vmatrix} ١ & \frac{ح}{ب} & \frac{ح}{ا} \\ \frac{ح}{ب} & ١ & \frac{ا}{ب} \\ \frac{ح}{ا} & \frac{ا}{ب} & ١ \end{vmatrix}$

بضرب (ب ح من ص$_{١}$ ، ا ح من ص$_{٢}$ ، ا ب من ص$_{٣}$)

$= \begin{vmatrix} ب ح & ا ب & ا ح \\ ا ب & ا ح & ب ح \\ ا ح & ب ح & ا ب \end{vmatrix}$ = الأيسر.

⑥ الأيمن = $\begin{vmatrix} ا_{١} + س ح_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \\ ا_{١} + س ب_{١} & ا_{٢} - س ب_{٢} & ا_{٣} - س ب_{٣} \\ ا_{١} + س ح_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \end{vmatrix}$

بإجراء (ع$_{٣}$ + ع$_{١}$)

$= \begin{vmatrix} ٢ ا_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \\ ٢ ا_{١} & ا_{٢} - س ب_{٢} & ا_{٣} - س ب_{٣} \\ ٢ ا_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \end{vmatrix}$

$= ٢ \begin{vmatrix} ا_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} - س ب_{٢} & ا_{٣} - س ب_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \end{vmatrix}$

بإجراء (ع$_{٣}$ − ع$_{١}$)

$= ٢ \begin{vmatrix} ا_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} - س ب_{٢} & ا_{٣} - س ب_{٣} \\ ٠ & س ب - س ح & س ح - س ح \end{vmatrix}$

$= -٢ س \begin{vmatrix} ا_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} - س ب_{٢} & ا_{٣} - س ب_{٣} \\ ٠ & ب - ح & ح - ح \end{vmatrix}$ = الأيسر.

⑦ الأيمن = $\begin{vmatrix} ا_{١} + س ح_{١} & ا_{٢} + س ح_{٢} & ا_{٣} + س ح_{٣} \\ ا_{١} + س ب_{١} & ا_{٢} + س ب_{٢} & ا_{٣} + س ب_{٣} \\ ا_{١} + س ح_{١} & ا_{٢} + س ح_{٢} & ا_{٣} + س ح_{٣} \end{vmatrix}$

بإجراء (ع$_{٣}$ − س ع$_{١}$)

$= \begin{vmatrix} ا_{١} & ا_{٢} + س ح_{٢} & ا_{٣} + س ح_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} + س ب_{٢} & ا_{٣} + س ب_{٣} \\ ا_{١} - ا_{١} س^{٢} & ا_{٢} - ا_{٢} س^{٢} & ا_{٣} - ا_{٣} س^{٢} \end{vmatrix}$

بإنخاذ (١ − س^{٢}) مشترك من ع$_{٣}$

$= (١ - س^{٢}) \begin{vmatrix} ا_{١} & ا_{٢} + س ح_{٢} & ا_{٣} + س ح_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} + س ب_{٢} & ا_{٣} + س ب_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} - ا_{٢} س & ا_{٣} - ا_{٣} س \end{vmatrix}$

بإجراء (ع$_{٢}$ − س ع$_{١}$)

$= (١ - س^{٢}) \begin{vmatrix} ا_{١} & ا_{٢} + س ح_{٢} & ا_{٣} + س ح_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} + س ب_{٢} & ا_{٣} + س ب_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} & ا_{٣} \end{vmatrix}$ = الأيسر.

⑧ الأيمن = $\begin{vmatrix} ص + ع & س ص & س \\ ص & ع + س ص & ص \\ ع & ع & س ص + ص \end{vmatrix}$

بإجراء (س ص$_{١}$ ، ص$_{م}$)

$= ص \begin{vmatrix} ص + ع & س & س \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س ص + ص \end{vmatrix}$

بإجراء (ع$_{١}$ + ع$_{٢}$)

$= ص \begin{vmatrix} ٢ ص + ع & س & س \\ ٢ ص + ع & ع + س & ص \\ ٠ & ع & س ص + ص \end{vmatrix}$

بأخذ (٢ مشترك من ص$_{م}$)

$= ٢ ص \begin{vmatrix} ص & س & س \\ ص & ع + س & ص \\ ٠ & ع & س ص + ص \end{vmatrix}$

بإجراء (ص$_{م}$ − ص$_{١}$)

$= ٢ ص \begin{vmatrix} ص & س & س \\ ٠ & ع & ص \\ ع & ع & س ص + ص \end{vmatrix}$

بإجراء (ص$_{م}$ − ص$_{٢}$)

$= ٢ ص \begin{vmatrix} ص & س & س \\ ٠ & ع & ص \\ ع & ٠ & س ص \end{vmatrix}$ = الأيسر.

⑨ الأيمن = $\begin{vmatrix} ب ح & ا ب & ا \\ ا ح & ب^{٢} & ب \\ ب & ح & ١ \end{vmatrix}$

بإجراء (ص$_{١}$ + ص$_{م}$)

$= \begin{vmatrix} ب ح + ا ح & ا ب + ب^{٢} & ا + ب \\ ا ح & ب^{٢} & ب \\ ب & ح & ١ \end{vmatrix}$

بأخذ (ا + ب) مشترك من ص$_{١}$

$= (ا + ب) \begin{vmatrix} ح & ب & ١ \\ ا ح & ب^{٢} & ب \\ ب & ح & ١ \end{vmatrix}$

(تبديل ع$_{١}$ ، ع$_{٣}$)

$= - (ا + ب) \begin{vmatrix} ب & ب^{٢} & ب \\ ا ح & ب^{٢} & ب \\ ح & ح & ١ \end{vmatrix}$

(تبديل ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$)

$= (ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ب & ب^{٢} & ب \\ ح & ح & ١ \end{vmatrix}$ = الأيسر.

١٨

$\begin{vmatrix} ا^{٢} - ١ & ا^{٢} & ا^{٢} \\ ب^{٢} - ١ & ب^{٢} & ب^{٢} \\ ح^{٢} - ١ & ح^{٢} & ح^{٢} \end{vmatrix} = .$

$\begin{vmatrix} ا^{٢} & ا^{٢} & ا^{٢} \\ ب^{٢} & ب^{٢} & ب^{٢} \\ ح^{٢} & ح^{٢} & ح^{٢} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ١ & ا^{٢} & ا^{٢} \\ ١ & ب^{٢} & ب^{٢} \\ ١ & ح^{٢} & ح^{٢} \end{vmatrix} = .$

$ا ب ح \begin{vmatrix} ا & ا^{٢} & ١ \\ ب & ب^{٢} & ١ \\ ح & ح^{٢} & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ا^{٢} & ا & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ ح^{٢} & ح & ١ \end{vmatrix} = .$

$٢ ا ب ح \begin{vmatrix} ا^{٢} & ا & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ ح^{٢} & ح & ١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ا^{٢} & ا & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ ح^{٢} & ح & ١ \end{vmatrix} = .$

$(٢ ا ب ح - ١) \begin{vmatrix} ا^{٢} & ا & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ ح^{٢} & ح & ١ \end{vmatrix} = .$

$\therefore$ ٢ ا ب ح − ١ = ٠ ، ومنها ا ب ح = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ ا ب ح = $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$

١٩

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٨ \\ ٣ & ٩ & ٢٧ \end{vmatrix} = ١٠$

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٨ \\ ٣ & ٩ & ٢٧ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٣ & ٧ \\ ٠ & ٦ & ٢٤ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ٣ & ٧ \\ ٦ & ٢٤ \end{vmatrix} = ٧٢ - ٤٢ = ٣٠$

$\therefore$ (حجم + ٤ ص$_{م}$) ، (حجم + ص$_{م}$)

$\begin{vmatrix} س & -١ & ٠ \\ ٠ & س & ١ \\ ٤ + ٣ س & ٠ & س \end{vmatrix} = ١٠$

$\begin{vmatrix} س & -١ & ٠ \\ ٠ & س & ١ \\ ٢ + س & ٠ & س \end{vmatrix} = ١٠$

$\therefore$ [س (٢ + س) − ٢ (٣ + ٤ س)] = ١٠

$\therefore$ س^{٢} + س^{٣} − ٦ − ٨ س = ١٠

$\therefore$ س^{٣} − ٦ س − ١٦ = ٠

$\therefore$ (س − ٨) (س + ٢) = ٠

$\therefore$ س = ٨ ، س = −٢

$\begin{vmatrix} ١ & -س & ٠ \\ ٠ & ١ & س \\ ١ & -١ & س + ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & -س & ٠ \\ ٠ & ١ & س \\ -س & س & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س^{٢} & ١ \\ س & س \end{vmatrix}$

$= س^{٣} + س$

حجم (ص$_{م}$ − ص$_{١}$ ، ص$_{م}$ − ص$_{٢}$) في المحدد الأول

$\begin{vmatrix} ١ & -س & ٠ \\ ٠ & ١ & س \\ ١ & -١ & س + ١ \end{vmatrix} = س^{٣} + س$

$\therefore$ [(١ + س^{٢}) (س + ١) − (−١ + س) × س)]

$\therefore$ س^{٣} + س

$\therefore$ س^{٣} + ص^{٣} + ع^{٣} − ٣ ص ع س

$\therefore$ س = −١

٢٠

الأيمن = $\begin{vmatrix} س & ا & ب \\ ا & س & ب \\ ا & ب & س \end{vmatrix}$

بإجراء (ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ + ع$_{٣}$)

، بأخذ (س + ا + ب) مشترك من ع$_{١}$

$= (س + ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & ا & ب \\ ١ & س & ب \\ ١ & ب & س \end{vmatrix}$

بإجراء (ص$_{٢}$ − ص$_{١}$ ، ص$_{٣}$ − ص$_{١}$)

$= (س + ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & ا & ب \\ ٠ & س - ا & ب - ب \\ ٠ & ب - ا & س - ب \end{vmatrix}$

(تبديل ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$)

$= - (س + ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ا \\ ٠ & ب - س & ب - ا \\ ٠ & س - ب & ب - ا \end{vmatrix}$

(تبديل ص$_{٢}$ ، ص$_{٣}$)

$= ٢ \begin{vmatrix} ا_{١} & ا_{٢} - س ب_{٢} & ا_{٣} - س ب_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} - س ب_{٢} & ا_{٣} - س ب_{٣} \end{vmatrix}$

بإجراء (ع$_{٢}$ − ع$_{١}$)

$= ٢ \begin{vmatrix} ا_{١} & ا_{٢} - س ب_{٢} & ا_{٣} - س ب_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \\ ٠ & س ب - س ح & س ب - س ح \end{vmatrix}$

$= -٢ س \begin{vmatrix} ا_{١} & ا_{٢} - س ب_{٢} & ا_{٣} - س ب_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \\ ٠ & ب - ح & ب - ح \end{vmatrix}$ = الأيسر.

$= \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ب & ب^{٢} & ب \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$ (−ب + ب)

$= \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ب & ب^{٢} & ب \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$ (−ح + ح)

$= - \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ب & ب^{٢} & ب \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$ (−ح + ب)

$= - \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ب & ب^{٢} & ب \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$ (−ب + ح)

$= - (ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ب & ب^{٢} & ب \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$

بضرب (ح في ص$_{م}$)

$= - ح (ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ب & ب^{٢} & ا \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$

تبديل (ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$)

$= (ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ا & ب^{٢} & ب \\ ب & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$ = الأيسر.

$\therefore$ (س + ٢ + ب) (س − ا) (س − ب) = الأيسر.

إذا إعتبرنا س = ٢ حاهـ ، ا = ١ ، ب = −١

فإن (٢ حاهـ + ١ + (−١)) (٢ حاهـ − (−١))

(٢ حاهـ − ١) = ٠

$\therefore$ ٢ حاهـ = ٠ ، ومنها حاهـ = ٠ $\therefore$ هـ = ٠° ، ١٨٠°

أ، ٢ حاهـ + ١ = ٠ ، ومنها حاهـ = $\frac{١}{٢}$ (مرفوض)

أ، ٢ حاهـ − ١ = ٠ ، ومنها حاهـ = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ هـ = ٣٠° ، ١٥٠°

$\therefore$ مجموعة الحل : {٠° ، ٣٠° ، ١٥٠° ، ١٨٠°}

٢١

① (د) ② (ب) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (ب) ⑥ (أ)

إرشادات للحل ٢١ :

① نفرض أن م = $\begin{vmatrix} ا & ب & ح \\ س ص & ع & ل \\ ء & هـ & و \end{vmatrix}$

$\therefore \begin{vmatrix} ٢ ا & ٢ ب & ٢ ح \\ ٢ س ص & ٢ ع & ٢ ل \\ ٢ ء & ٢ هـ & ٢ و \end{vmatrix}$

$= ٢ \times ٢ \times \begin{vmatrix} ا & ب & ح \\ س ص & ع & ل \\ ء & هـ & و \end{vmatrix} = ٤ م$

⑦ $\because \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -٤ & ١ \end{vmatrix} = -٤ \times ١ - ١ \times ١ = -٥$

$\therefore \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} = -٤ ، \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -٤ & ١ \end{vmatrix} = -٥ ، \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -٥ & ١ \end{vmatrix} = -٦$

$\therefore$ النواتج تكون متتابعة حسابية عدد حدودها = ١٥

وحدها الأول = −٥ وحدها الأخير = ٩

$\therefore$ المجموع = $\frac{١٥}{٢}$ (−٥ + ٩) = ٣٠

$\begin{vmatrix} ١ & س & ب \\ ا & س^{٢} & ب^{٢} \\ ح & ح^{٢} & ح^{٢} \end{vmatrix} = (ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & س & ب \\ ا & س^{٢} & ب \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$

بضرب (ح في ص$_{م}$)

$= - ح (ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & س & ب \\ ا & س^{٢} & ب \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$

تبديل (ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$)

$= (ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & س & ب \\ ا & س^{٢} & ب \\ ب & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$ = الأيسر.

١٨

$\begin{vmatrix} ا^{٢} - ١ & ا^{٢} & ا^{٢} \\ ب^{٢} - ١ & ب^{٢} & ب^{٢} \\ ح^{٢} - ١ & ح^{٢} & ح^{٢} \end{vmatrix} = .$

$\begin{vmatrix} ا^{٢} & ا^{٢} & ا^{٢} \\ ب^{٢} & ب^{٢} & ب^{٢} \\ ح^{٢} & ح^{٢} & ح^{٢} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ١ & ا^{٢} & ا^{٢} \\ ١ & ب^{٢} & ب^{٢} \\ ١ & ح^{٢} & ح^{٢} \end{vmatrix} = .$

$ا ب ح \begin{vmatrix} ا & ا^{٢} & ١ \\ ب & ب^{٢} & ١ \\ ح & ح^{٢} & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ا^{٢} & ا & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ ح^{٢} & ح & ١ \end{vmatrix} = .$

$٢ ا ب ح \begin{vmatrix} ا^{٢} & ا & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ ح^{٢} & ح & ١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ا^{٢} & ا & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ ح^{٢} & ح & ١ \end{vmatrix} = .$

$(٢ ا ب ح - ١) \begin{vmatrix} ا^{٢} & ا & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ ح^{٢} & ح & ١ \end{vmatrix} = .$

$\therefore$ ٢ ا ب ح − ١ = ٠ ، ومنها ا ب ح = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ ا ب ح = $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$

١٩

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٨ \\ ٣ & ٩ & ٢٧ \end{vmatrix} = ١٠$

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٨ \\ ٣ & ٩ & ٢٧ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٣ & ٧ \\ ٠ & ٦ & ٢٤ \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ٣ & ٧ \\ ٦ & ٢٤ \end{vmatrix} = ٧٢ - ٤٢ = ٣٠$

$\therefore$ (حجم + ٤ ص$_{م}$) ، (حجم + ص$_{م}$)

$\begin{vmatrix} س & -١ & ٠ \\ ٠ & س & ١ \\ ٤ + ٣ س & ٠ & س \end{vmatrix} = ١٠$

$\begin{vmatrix} س & -١ & ٠ \\ ٠ & س & ١ \\ ٢ + س & ٠ & س \end{vmatrix} = ١٠$

$\therefore$ [س (٢ + س) − ٢ (٣ + ٤ س)] = ١٠

$\therefore$ س^{٢} + س^{٣} − ٦ − ٨ س = ١٠

$\therefore$ س^{٣} − ٦ س − ١٦ = ٠

$\therefore$ (س − ٨) (س + ٢) = ٠

$\therefore$ س = ٨ ، س = −٢

$\begin{vmatrix} ١ & -س & ٠ \\ ٠ & ١ & س \\ ١ & -١ & س + ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & -س & ٠ \\ ٠ & ١ & س \\ -س & س & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س^{٢} & ١ \\ س & س \end{vmatrix}$

$= س^{٣} + س$

حجم (ص$_{م}$ − ص$_{١}$ ، ص$_{م}$ − ص$_{٢}$) في المحدد الأول

$\begin{vmatrix} ١ & -س & ٠ \\ ٠ & ١ & س \\ ١ & -١ & س + ١ \end{vmatrix} = س^{٣} + س$

$\therefore$ [(١ + س^{٢}) (س + ١) − (−١ + س) × س)]

$\therefore$ س^{٣} + س

$\therefore$ س^{٣} + ص^{٣} + ع^{٣} − ٣ ص ع س

$\therefore$ س = −١

٢٠

الأيمن = $\begin{vmatrix} س & ا & ب \\ ا & س & ب \\ ا & ب & س \end{vmatrix}$

بإجراء (ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ + ع$_{٣}$)

، بأخذ (س + ا + ب) مشترك من ع$_{١}$

$= (س + ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & ا & ب \\ ١ & س & ب \\ ١ & ب & س \end{vmatrix}$

بإجراء (ص$_{٢}$ − ص$_{١}$ ، ص$_{٣}$ − ص$_{١}$)

$= (س + ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & ا & ب \\ ٠ & س - ا & ب - ب \\ ٠ & ب - ا & س - ب \end{vmatrix}$

(تبديل ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$)

$= - (س + ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ا \\ ٠ & ب - س & ب - ا \\ ٠ & س - ب & ب - ا \end{vmatrix}$

(تبديل ص$_{٢}$ ، ص$_{٣}$)

$= ٢ \begin{vmatrix} ا_{١} & ا_{٢} - س ب_{٢} & ا_{٣} - س ب_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} - س ب_{٢} & ا_{٣} - س ب_{٣} \end{vmatrix}$

بإجراء (ع$_{٢}$ − ع$_{١}$)

$= ٢ \begin{vmatrix} ا_{١} & ا_{٢} - س ب_{٢} & ا_{٣} - س ب_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \\ ٠ & س ب - س ح & س ب - س ح \end{vmatrix}$

$= -٢ س \begin{vmatrix} ا_{١} & ا_{٢} - س ب_{٢} & ا_{٣} - س ب_{٣} \\ ا_{١} & ا_{٢} - س ح_{٢} & ا_{٣} - س ح_{٣} \\ ٠ & ب - ح & ب - ح \end{vmatrix}$ = الأيسر.

$= \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ب & ب^{٢} & ب \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$ (−ب + ب)

$= \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ب & ب^{٢} & ب \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$ (−ح + ح)

$= - \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ب & ب^{٢} & ب \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$ (−ح + ب)

$= - \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ب & ب^{٢} & ب \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$ (−ب + ح)

$= - (ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ب & ب^{٢} & ب \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$

بضرب (ح في ص$_{م}$)

$= - ح (ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ب & ب^{٢} & ا \\ ح & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$

تبديل (ع$_{٢}$ ، ع$_{٣}$)

$= (ا + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ا & ب^{٢} & ب \\ ب & ح^{٢} & ح \end{vmatrix}$ = الأيسر.

$\therefore$ (س + ٢ + ب) (س − ا) (س − ب) = الأيسر.

إذا إعتبرنا س = ٢ حاهـ ، ا = ١ ، ب = −١

فإن (٢ حاهـ + ١ + (−١)) (٢ حاهـ − (−١))

(٢ حاهـ − ١) = ٠

$\therefore$ ٢ حاهـ = ٠ ، ومنها حاهـ = ٠ $\therefore$ هـ = ٠° ، ١٨٠°

أ، ٢ حاهـ + ١ = ٠ ، ومنها حاهـ = $\frac{١}{٢}$ (مرفوض)

أ، ٢ حاهـ − ١ = ٠ ، ومنها حاهـ = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ هـ = ٣٠° ، ١٥٠°

$\therefore$ مجموعة الحل : {٠° ، ٣٠° ، ١٥٠° ، ١٨٠°}

٢١

① (د) ② (ب) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (ب) ⑥ (أ)

إرشادات للحل ٢١ :

① نفرض أن م = $\begin{vmatrix} ا & ب & ح \\ س ص & ع & ل \\ ء & هـ & و \end{vmatrix}$

$\therefore \begin{vmatrix} ٢ ا & ٢ ب & ٢ ح \\ ٢ س ص & ٢ ع & ٢ ل \\ ٢ ء & ٢ هـ & ٢ و \end{vmatrix}$

$= ٢ \times ٢ \times \begin{vmatrix} ا & ب & ح \\ س ص & ع & ل \\ ء & هـ & و \end{vmatrix} = ٤ م$

⑦ $\because \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -٤ & ١ \end{vmatrix} = -٤ \times ١ - ١ \times ١ = -٥$

$\therefore \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} = -٤ ، \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -٤ & ١ \end{vmatrix} = -٥ ، \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -٥ & ١ \end{vmatrix} = -٦$

$\therefore$ النواتج تكون متتابعة حسابية عدد حدودها = ١٥

وحدها الأول = −٥ وحدها الأخير = ٩

$\therefore$ المجموع = $\frac{١٥}{٢}$ (−٥ + ٩) = ٣٠

بتدوير المحدد

$= \begin{vmatrix} 1 & ن & \frac{ن^2 - ن}{2} \\ 1 & ن+1 & \frac{ن^2 + ن}{2} \\ 1 & ن+2 & \frac{ن^2 + 3ن + 2}{2} \end{vmatrix}$

(ص₂ − ص₁) ، (ص₃ − ص₁)

$= \begin{vmatrix} 1 & ن & \frac{ن^2 - ن}{2} \\ 0 & 1 & ن \\ 0 & 2 & 2ن + 1 \end{vmatrix}$ (ص₃ − ٢ ص₂)

$= \begin{vmatrix} 1 & ن & \frac{ن^2 - ن}{2} \\ 0 & 1 & ن \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

١٢

① الأيمن $= \begin{vmatrix} ص + ع & س & س \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ص & س & س \\ ص & ع + س & ص \\ 0 & ع & س + ص \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ع & س & س \\ 0 & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix}$

$= ص \begin{vmatrix} 1 & س & س \\ 1 & ع + س & ص \\ 0 & ع & س + ص \end{vmatrix} + ع \begin{vmatrix} 1 & س & س \\ 0 & ع + س & ص \\ 1 & ع & س + ص \end{vmatrix}$

بإجراء (ص₂ − ص₁) في المحدد الأول ، ص₃ − ص₁ في المحدد الثاني

$= ص \begin{vmatrix} 1 & س & س \\ 0 & ع & ص - س \\ 0 & ع & س + ص \end{vmatrix} + ع \begin{vmatrix} 1 & س & س \\ 0 & ع + س & ص \\ 0 & ع - س & ص \end{vmatrix}$

بإجراء ص₃ − ص₂ في كل من المحددين

$= ص \begin{vmatrix} 1 & س & س \\ 0 & ع & ص - س \\ 0 & 0 & 2س \end{vmatrix} + ع \begin{vmatrix} 1 & س & س \\ 0 & ع + س & ص \\ 0 & -2س & 0 \end{vmatrix}$

تبديل ع₂ مع ع₃

$= ص (1 \times ع \times 2س) - ع \begin{vmatrix} 1 & س & س \\ 0 & ص & ع + س \\ 0 & 0 & -2س \end{vmatrix}$

= ٢ س ص ع − ع (ص × −٢ س)

= ٤ س ص ع

② الأيمن $= \begin{vmatrix} \sqrt{13} + \sqrt{3} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{26} + \sqrt{15} & 5 & \sqrt{10} \\ \sqrt{65} + 3 & \sqrt{15} & 5 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \sqrt{13} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{26} & 5 & \sqrt{10} \\ \sqrt{65} & \sqrt{15} & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{15} & 5 & \sqrt{10} \\ 3 & \sqrt{15} & 5 \end{vmatrix}$

$= \sqrt{13} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{5} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{vmatrix} + \sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{vmatrix}$

بإجراء (ع₁ − ع₃)

$= صفر + 5\sqrt{3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{vmatrix}$

بإجراء (ص₃ − $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ ص₂)

$= 5\sqrt{3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \end{vmatrix}$

$= 5\sqrt{3} \times -1 \times \sqrt{5} \times (\sqrt{5} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}})$

$= 5\sqrt{3} (\sqrt{6} - 5) =$ الأيسر.

١٣

$\because \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

بإجراء (ص₂ − ص₁)

$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

بإجراء ع₁ + ع₂ + ع₃

$= \begin{vmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 12 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

بإجراء (ص₂ − ص₁ ، ص₃ − ص₁)

$= \begin{vmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 \times 3 \times 3 = 108$

11 اجابات تمارين

١

① $أ = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore |أ| = 2 \times 5 - 3 \times 4 = -2 \neq 0$

∴ أ غير منفردة.

② $ب = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore |ب| = 1 \times 3 - (-2) \times 0 = 3 \neq 0$

∴ ب غير منفردة

③ $ج = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(٥) المصفوفة تكون منفردة عندما $\Delta = 0$

$\begin{vmatrix} س - 1 & 3 \\ 4 & س + 3 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore (س - 1)(س + 3) - 12 = 0$

$س^2 + 2س - 3 - 12 = 0$

$س^2 + 2س - 15 = 0$

س = −٥ ، س = ٣

(٦) لتكون المصفوفة منفردة. $\therefore \Delta = 0$

$\begin{vmatrix} س + 3 & 2 \\ س + 2 & س + 2 \end{vmatrix} = 0$

$(س + 3)(س + 2) - 2(س + 2) = 0$

$(س + 2)(س + 1) = 0$

∴ س = −٢ ، س = −١

(٧) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2س & 3س & س + 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

بإجراء (ع₁ − ع₃)

(س − ١) = صفر ∴ س = ١

① $\begin{vmatrix} جاس & جتاس & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ طاس & قاس & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\sqrt{3}$ جاس − جتاس = ٠

$\therefore$ ظاس $= \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ س = ٣٠° + ١٨٠° ن حيث ن ∈ ص

٢

(١) $هـ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

مصفوفة المرافقات للمصفوفة هـ

$= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

(٢) $ج = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

مصفوفة المرافقات للمصفوفة ج

$= \begin{pmatrix} -2 & 15 & -12 \\ -25 & 23 & -9 \\ 17 & -10 & 8 \end{pmatrix}$

٤

① $ب = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ، $ب^{مد} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$ب \, ب^{مد} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 I$

$ب^{مد} ب = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 I$

② $ب = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

مصفوفة المرافقات للمصفوفة ب

$= \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 15 & 2 & -10 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$ب^{مد} = \begin{pmatrix} 7 & 15 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & -10 & 4 \end{pmatrix}$

$|ب| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

ب ب^{مد} = −I ، ب^{مد} ب = −I

(١) $ب = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$ب^{مد} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore ب^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

② $ب = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

∵ |ب| = صفر

∴ لا يوجد للمصفوفة ب معكوس ضربي.

③ $ب = \begin{pmatrix} قاθ & 1 \\ 1 & قاθ \end{pmatrix}$

|ب| = قا²θ − ١ = ظا²θ

$ب^{مد} = \begin{pmatrix} قاθ & -1 \\ -1 & قاθ \end{pmatrix}$

$ب^{-1} = \frac{1}{ظا^2 θ} \begin{pmatrix} قاθ & -1 \\ -1 & قاθ \end{pmatrix}$

$= ظتا^2θ \begin{pmatrix} قاθ & -1 \\ -1 & قاθ \end{pmatrix}$

④ $ب = \begin{pmatrix} جاθ & -جتاθ \\ جتاθ & جاθ \end{pmatrix}$

|ب| = جا²θ + جتا²θ = ١

$ب^{-1} = \begin{pmatrix} جاθ & جتاθ \\ -جتاθ & جاθ \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2- & 1 \\ 3 & 1- & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2- & 1 \\ 3 & 1- & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = 1 \ ، \ \text{ص} = -1 \ ، \ \text{ع} = 2$$

(ب) نفرض أن $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1- & 1 \\ 1 & 1 & 1- \end{pmatrix}$

$$\therefore |\text{أ}| = 6 \neq 0$$

$$\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2- & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2- & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = 1 \ ، \ \text{ص} = 2 \ ، \ \text{ع} = 3$$

١٤

① $\text{س} + \text{ص} = 2 \ ، \ 2\text{س} + 3\text{ص} = 5$

∴ المعادلة المصفوفية هي

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1- \\ 2- & 1 \end{pmatrix}$$

∴ ن (أ) = ١ ، ن (٦) = ٢

∴ ن (أ) = ن (٦) = عدد المجاهيل.

∴ يوجد حل وحيد. لإيجاد الحل نوجد أ^{-1}

$$\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1- \\ 2- & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1- \\ 2- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3- \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = -3 \ ، \ \text{ص} = 1$$

② $5\text{س} - \text{ص} = -11 \ ، \ 3\text{س} - \text{ص} = 5$

∴ المعادلة المصفوفية هي

$$\begin{pmatrix} 11- \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1- \\ 3 & 1- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 5 & 1- \\ 3 & 1- \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} 1- & 1 \\ 3 & 5- \end{pmatrix}$$

∴ ن (أ) = ٢ ، ن (٦) = ٢

∴ ن (أ) = ن (٦) = عدد المجاهيل.

∴ يوجد حل وحيد. لإيجاد الحل نوجد أ^{-1}

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = 3 \ ، \ \text{ص} = 1$$

١٣

① $\text{ك}\text{س} + 3\text{ص} = 6 \ ، \ \text{س} + \text{ص} = 2$

∴ المعادلة المصفوفية هي

$$\begin{pmatrix} \text{ك} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{ك} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ ، \ |\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{ك} & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{ك} - 3$$

∴ لكي تكون للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول

فإن ن (أ) = ١ ، ن (٦) = ١

∴ |أ| = ٠ ∴ ك − ٣ = ٠

∴ ك = ٣

② $\text{ك}\text{س} + 3\text{ص} = 5 \ ، \ 2\text{س} + (4 - \text{ك})\text{ص} = 5$

المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} \text{ك} & 3 \\ 2 & 4 - \text{ك} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{ك} & 3 \\ 2 & 4 - \text{ك} \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 - \text{ك} \end{pmatrix}$$

لكي تكون للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول يجب أن تكون ن (أ) = ن (٦) = ١

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{ك} & 3 \\ 2 & 4 - \text{ك} \end{vmatrix} = 0$$

∴ $4\text{ك} - \text{ك}^2 - 6 = 0$

فإن ك = ٢ ، ك = $\frac{3}{2}$

عند ك = ٢ فإن ن (أ) = ن (أ) = ١ < ٢

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول عند ك = ٢

∴ عند ك = $\frac{3}{2}$ فإن ن (أ) = ١ ، ن (أ) = ٢

فإن $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$

⑦ $7\text{س} - 4\text{ص} = 9 \ ، \ 4\text{ص} - 7\text{س} = 12$

المعادلة المصفوفية هي

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4- \\ 4 & 7- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 7 & 4- \\ 4 & 7- \end{pmatrix} \ ، \ |\text{أ}| = 49 - 16 = 33 \neq 0$$

∴ ن (أ) = ٢ ، ن (٦) = ٢

∴ ن (أ) = ن (٦)

∴ المعادلات ليس لها حل.

① $\text{ص} = \text{س} - 5 \ ، \ \text{ص} = \text{ص} + 9$

ومنها س − ص = ٥ ، س − ص = ٩

∴ المعادلة المصفوفية هي

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1- \\ 1 & 1- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1- \\ 1 & 1- \end{pmatrix} \ ، \ |\text{أ}| = 0$$

∴ ن (أ) = ١ ، ن (٦) = ٢

∴ ن (أ) ≠ ن (٦)

∴ المعادلات ليس لها حل.

⑤ $\text{ص} = 2\text{س} - 3 \ ، \ 4\text{س} - 2\text{ص} = 6$

∴ $2\text{س} - \text{ص} = 3 \ ، \ 4\text{س} - 2\text{ص} = 6$

المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1- \\ 4 & 2- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 1- \\ 4 & 2- \end{pmatrix} \ ، \ 6 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

∴ ن (أ) = ١ ، ن (٦) = ١

∴ ن (أ) = ن (٦) = عدد المجاهيل

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول على الصورة

(أ ، ٢ أ − ٣)

المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ك} & 2 \\ 2 & \text{ك} - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

لكي تكون للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول يجب أن تكون ن (أ) = ن (٦) = ١

ولكن ن (٦) = ٢

∴ لا توجد قيمة لـ ك تجعل للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول

③ $3\text{س} + 9\text{ص} = 2(\text{ك} + 1)$

$2\text{س} + 6\text{ص} = \text{ك} + 3$

المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} 2(\text{ك} + 1) \\ \text{ك} + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

لكي تكون للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول يجب أن تكون ن (أ) = ن (٦) = ١

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & 2(\text{ك} + 1) \\ 2 & \text{ك} + 3 \end{vmatrix} = 0$$

$3\text{ك} + 9 - 2(2\text{ك} + 2) = 0$

$3\text{ك} + 9 - 4\text{ك} - 4 = 0$

$\text{ك} + 5 = 0$ ∴ ك = −٥

١٤

① $3\text{س} + 3\text{ص} = 0 \ ، \ 4\text{س} + 9\text{ص} = 0$

المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

∴ ن (أ) = ٢ = عدد المجاهيل.

∴ لا يوجد إلا الحل الصفري.

② $2\text{س} + 3\text{ص} = 0 \ ، \ 6\text{س} + 4\text{ص} = 0$

المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

∴ ن (أ) = ١

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول من بينهم الحل الصفري

١٥

① $2\text{س} + 7\text{ص} + 3\text{ع} = 0$

$3\text{س} + \text{ص} - 2\text{ع} = 0$

$4\text{س} + 3\text{ص} - \text{ع} = 0$

المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 2- \\ 4 & 3- & 1- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 2- \\ 4 & 3- & 1- \end{pmatrix}$$

|أ| = ٠

∴ ن (أ) = ن (٦) = ٢ < عدد المجاهيل

∴ للمعادلات الحل الصفري فقط.

③ $\text{س} + 2\text{ص} - \text{ع} = 0 \ ، \ 2\text{س} + 3\text{ص} + \text{ع} = 0$

$3\text{س} - 4\text{ص} + 2\text{ع} = 0$

المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1- \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4- & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1- \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4- & 2 \end{pmatrix}$$

∴ |أ| = صفر

∴ ن (أ) = ن (٦) = ٢ < عدد المجاهيل

∴ للمعادلات الحل الصفري فقط

١٦

(أ) $\text{س} + 2\text{ص} = 2\text{ع}$

$2\text{س} + 3\text{ص} = 5\text{ع}$

$\text{س} + \text{ص} = 2\text{ع}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2- \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 & 11- & 6 \\ 7 & 16 & 6- \\ 6- & 30 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 & 11- & 6 \\ 7 & 16 & 6- \\ 6- & 30 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}_{\text{مط}} = \begin{pmatrix} 2- & 1 & 2- \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 15$$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 9 & 6- & 4 \\ 4 & 9 & 6- \\ 6- & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 9 & 6- & 4 \\ 4 & 9 & 6- \\ 6- & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 9 & 6- & 4 \\ 4 & 9 & 6- \\ 6- & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ٣

④ المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2- \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}_{\text{مط}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2- \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 15$$

$$\therefore \text{أ}_{\text{مط}} = \begin{pmatrix} 2- & 11- & 6 \\ 7 & 16 & 6- \\ 6- & 30 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 & 11- & 6 \\ 7 & 16 & 6- \\ 6- & 30 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 & 11- & 6 \\ 7 & 16 & 6- \\ 6- & 30 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2- & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 1- & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

⑤ المعادلة المصفوفية

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2- & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 1- & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 34$$

$$\therefore \text{أ}_{\text{مط}} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8- \\ 18- & 6 & 2 \\ 3- & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 4 & 10 & 8- \\ 18- & 6 & 2 \\ 3- & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 4 & 10 & 8- \\ 18- & 6 & 2 \\ 3- & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ١

⑥ المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1- & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\text{س}} \\ \frac{1}{\text{ص}} \\ \frac{1}{\text{ع}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1- & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = 11$$

$$\therefore \text{أ}_{\text{مط}} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 8 & 2- & 1 \\ 5 & 1- & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{س}} \\ \frac{1}{\text{ص}} \\ \frac{1}{\text{ع}} \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 8 & 2- & 1 \\ 5 & 1- & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ٢ ، ص = ٣ ، ع = ٤

⑦ المعادلة المصفوفية :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & 6- & 5 \\ 6 & 9 & 20- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\text{س}} \\ \frac{1}{\text{ص}} \\ \frac{1}{\text{ع}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & 6- & 5 \\ 6 & 9 & 20- \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\text{أ}| = \pm 1200$$

$$\therefore \text{أ}_{\text{مط}} = \begin{pmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 110 & 100- & 30 \\ 24- & \text{صفر} & 72 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{1200}\begin{pmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 110 & 100- & 30 \\ 24- & \text{صفر} & 72 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{س}} \\ \frac{1}{\text{ص}} \\ \frac{1}{\text{ع}} \end{pmatrix} = \frac{1}{1200}\begin{pmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 110 & 100- & 30 \\ 24- & \text{صفر} & 72 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ٢ ، ص = ٣ ، ع = ٤

⑧ المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1- & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \frac{1}{\text{ع}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1- & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\text{أ}| = -23 \neq \text{صفر}$$

$\therefore$ ن (أ) = ن (أ*) = ٣ = عدد المجاهيل

$\therefore$ للمعادلات حل وحيد

$$\therefore \text{أ}_{\text{مط}} = \begin{pmatrix} 1 & 3- & 2- \\ 7- & 1- & 3 \\ 19- & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{11-}\begin{pmatrix} 1 & 3- & 2- \\ 7- & 1- & 3 \\ 19- & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{11-}\begin{pmatrix} 1 & 3- & 2- \\ 7- & 1- & 3 \\ 19- & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣

⑨ المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1- & 1- \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1- & 1- \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\text{أ}| = -23 \neq \text{صفر}$$

$\therefore$ ن (أ) = ن (أ*) = ٣ = عدد المجاهيل

$\therefore$ للمعادلات حل وحيد

∵ لكى يكون للمعادلات حل وحيد يجب أن يكون $|A| \neq 0$

$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 2 & -2 & \alpha \end{vmatrix} \neq 0$

$\therefore 1(\alpha + 2\alpha) - 0 + (2\alpha - 2\alpha) - 2(-7) \neq 0$

$\therefore \alpha \neq \frac{-2}{3}$

فى حالة $\alpha = 1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore |A| = 22$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ -6 & 17 & -9 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ -6 & 17 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{14}{11} \\ \frac{21}{11} \end{pmatrix}$

$\therefore س = \frac{1}{11}$ ، $ص = \frac{14}{11}$ ، $ع = \frac{21}{11}$

٤٦

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

لكى يكون للمعادلات عدد غير منته من الحلول

فإن $د(A) = د(A^+) <$ عدد المجاهيل.

وبوضع $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \alpha(\alpha - 1) - 1(\alpha - 1) + 1(1 - \alpha) = 0$

$\therefore \alpha(\alpha^2 - 1) - (\alpha - 1) + (1 - \alpha) = 0$

$\therefore \alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1) - (\alpha - 1) - (\alpha - 1) = 0$

$\therefore (\alpha - 1)[\alpha(\alpha + 1) - 2] = 0$

$\therefore (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 2) = 0$

$\therefore \alpha = 1$ ، $\alpha = -2$

• عند $\alpha = 1$

$\therefore |A| = 0 \quad \therefore 3 \geq د(A) > 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

∵ جميع المحددات من الدرجة ٢ = صفر

$\therefore د(A) = د(A^+) = 1$

$\therefore$ يوجد عدد غير منته من الحلول عند $\alpha = 1$

• عند $\alpha = -2$

$\therefore 3 \geq د(A) > 2$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$

$\therefore د(A^2) = 3 \quad \therefore د(A) = د(A^+)$

$\therefore$ يوجد حل عند $\alpha = -2$

٤٧

$\begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

لكى يكون للمعادلات حل وحيد $|A| \neq$ صفر

$\therefore \begin{vmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \neq 0$

$\therefore \alpha(\alpha + 4) - 2(0 + 4) + 1(0 - 2) \neq 0$

$\therefore \alpha^2 + 4\alpha - 10 \neq 0$

$\therefore (\alpha - 2)(\alpha + 5) \neq 0$

$\therefore \alpha \neq 2$ ، $\alpha \neq -5$

• يكون للمعادلات حل وحيد عند

كل قيم $\alpha \in ح - \{2 ، -5\}$

• عند $\alpha = 2$

$\therefore 3 \geq د(A) > 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq$ صفر

$\therefore د(A^2) = 3$

$\therefore د(A) = 2$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

∵ قيمة جميع المحددات من الدرجة ٣ = صفر

$\therefore$ قيمة $\alpha = 2$

$\therefore د(A) = 2$

$\therefore د(A^+) = 2$ ∴ عدد المجاهيل

$\therefore د(A) = د(A^+) = 2 <$ عدد المجاهيل

∴ يكون للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول

• عند $\alpha = -5$ ∴ $|A| = 0$

$\therefore 3 \geq د(A) > 2$

$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

∵ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -11 \neq$ صفر

$\therefore د(A) = 2$

$A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$

$= \begin{pmatrix} 27 & 3 & -11 \\ -4 & 3 & 8 \\ -11 & 3 & 27 \end{pmatrix}$

$\therefore د(A^2) = 2$

$\therefore د(A) = 2$

٤٨

$\begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

لكى يكون للمعادلات حل وحيد $|A| \neq$ صفر

$\therefore \begin{vmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \neq 0$

$\therefore \alpha(\alpha + 4) - 2(0 + 4) + 1(0 - 2) \neq 0$

$\therefore \alpha^2 + 4\alpha - 10 \neq 0$

$\therefore (\alpha - 2)(\alpha + 5) \neq 0$

$\therefore \alpha \neq 2$ ، $\alpha \neq -5$

• يكون للمعادلات حل وحيد عند

كل قيم $\alpha \in ح - \{2 ، -5\}$

• عند $\alpha = 2$

$\therefore 3 \geq د(A) > 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq$ صفر

$\therefore د(A^2) = 3$

$\therefore د(A) = 2$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$ ∴ A^2 غير شاذة

$= 2(-3 - 15) + 1(1 + 3) - 2(-5 + 3)$

$= -28 \neq$ صفر

$\therefore د(A^2) = 3 \quad \therefore د(A) \neq د(A^+)$

$\therefore$ عند $\alpha = 5$ ليس للمعادلات حل على الإطلاق

٤٩

(أ) (ب) (ج) (د) (هـ)

إجابات أخطاء شائعة

(١) ∵ $|A| = 0$ ∴ المصفوفة غير صفرية على النظام $\neq 0$

$\therefore 2 \geq د(A) > 0$

$\therefore د(A) = 1$

ثانيًا

إجابات الهندسة الفراغية

إجابات تمارين

1

الهندسة والقياس في ثلاثة أبعاد

④ $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٦ ع = ٠$

∴ المركز = (٠ ، ٠ ، ٣) ، نق = ٣

⑤ بقسمة المعادلة على (٣)

∴ $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - س - ٣ ص - ٢ ع + ١ = ٠$

المركز = $(\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢} ، ١)$

، نق = $\sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤} + ١ - ١} = \frac{\sqrt{١٠}}{٢}$

∴ المساحة = $٤ \pi (\frac{\sqrt{١٠}}{٢})^٢ = ١٠ \pi$ سم^٢

⑥ المركز = (١ ، -٢ ، ٠)

، نق = $\sqrt{١ + ٤ + ٠ - ٠} = \sqrt{٥}$

٤

مركز الكرة (٢ ، -١ ، ٣)

نجعل ب = (س ، ص ، ع)

$(\frac{-٦ + س}{٢} ، \frac{٣ + ص}{٢} ، \frac{٢ + ع}{٢}) = (٢ ، -١ ، ٣)$

$\frac{-٦ + س}{٢} = ٢$	$\frac{٣ + ص}{٢} = -١$	$\frac{٢ + ع}{٢} = ٣$
-٦ + س = ٤	٣ + ص = -٢	٢ + ع = ٦
س = ١٠	ص = -٥	ع = ٤

∴ ب (١٠ ، -٥ ، ٤)

٥

إذا كانت : $(\frac{أ}{٢})^٢ + (\frac{ب}{٢})^٢ + (\frac{جـ}{٢})^٢ + د >$ صفر

أى أن : $أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢ + ٤ د > ٠$

٦

$م_١$ (٢ ، -٤ ، ٢) ، $نق_١ = ١$

، $م_٢$ (-٤ ، ٤ ، ٢) ، $نق_٢ = ٢$

∴ $م_١ م_٢ = \sqrt{٦^٢ + (-٨)^٢ + ٠^٢} = ١٠$ وحدات.

∵ $نق_١ + نق_٢ < م_١ م_٢$

∴ الكرتان متباعدتان أى غير متقاطعتين.

٧

$م_١$ = (٣ ، ٠ ، ٢) ، $نق_١ = ٤$

، $م_٢$ = (-١ ، ٤ ، ك) ، $نق_٢ = ٥$

∴ $م_١ م_٢ = \sqrt{(٤)^٢ + (-٤)^٢ + (٣ - ك)^٢}$

$= \sqrt{٣٢ + (٣ - ك)^٢}$

فى حالة التماس من الداخل : $م_١ م_٢ = |نق_٢ - نق_١|$

$\sqrt{٣٢ + (٣ - ك)^٢} = ٥ - ٤ = ١$

∴ $٣٢ + (٣ - ك)^٢ = ١$

∴ $(٣ - ك)^٢ = -٣١$ (مرفوض)

فى حالة التماس من الخارج : $م_١ م_٢ = نق_٢ + نق_١$

∴ $\sqrt{٣٢ + (٣ - ك)^٢} = ٥ + ٤ = ٩$

∴ $٣٢ + (٣ - ك)^٢ = ٨١$ ∴ $(٣ - ك)^٢ = ٤٩$

∴ ٣ - ك = ± ٧ ∴ ك = ١٠ أو -٤

٨

① مركزها (٠ ، ٠ ، ٢) أو (٠ ، ٠ ، -٢) ، نق = ٢

المعادلة : $س^٢ + ص^٢ + (ع - ٢)^٢ = ٤$

أو $س^٢ + ص^٢ + (ع + ٢)^٢ = ٤$

② النقطة على المحور س

∴ تمس المستوى ص ع ∴ نق = ٣

∴ المعادلة : $(س - ٣)^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٩$

③ نق = ٣

∴ المعادلة :

$(س + ٣)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ٩$

④ ∴ نق = |-٣| = ٣

المعادلة : $(س + ٣)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٥)^٢ = ٩$

⑤ نق = |٤ - ٣| = ١

المعادلة $(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ١$

⑥ نفرض أن معادلة الكرة :

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص$

$+ ٢ ن ع + جـ = ٠$

(٠ ، ٠ ، ٠) ∈ للكرة ∴ جـ = ٠

(٠ ، ٠ ، ٤) ∈ للكرة ∴ ١٦ + ٨ ن + ٠ = ٠

ن = -٢

، (-٥ ، -٤ ، ١) ∈ للكرة

٢٥ + ١٦ + ١ - ١٠ ل - ٨ ك - ٤ = ٠

∴ ١٠ ل + ٨ ك = ٢٨

∴ ٥ ل + ٤ ك = ١٩ (١)

، (٣ ، ٤ ، -٥) ∈ للكرة

٩ + ١٦ + ٢٥ + ٦ ل + ٨ ك + ٢٠ = ٠

٦ ل + ٨ ك = -٧٠

∴ ٣ ل + ٤ ك = -٣٥ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ل = ٢٧ ، ك = -٢٩

∴ المعادلة :

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٥٤ س - ٥٨ ص + ٤ ع = ٠$

⑦ نفرض أن معادلة الكرة هى :

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص$

$+ ٢ ن ع + جـ = ٠$

(٤ ، ٠ ، ٠) ∈ للكرة

١٦ + ٠ + ٠ + ٨ ل + ٠ + ٠ + جـ = ٠

∴ ل = $\frac{-١}{٨}$ (جـ + ١٦)

(٠ ، ٤ ، ٠) ∈ للكرة ، (٠ ، ٠ ، ٤) ∈ للكرة

∴ ك = $\frac{-١}{٨}$ (جـ + ١٦) ، ن = $\frac{-١}{٨}$ (جـ + ١٦)

∴ ل = ك = ن = $\frac{-١}{٨}$ (جـ + ١٦)

$ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - جـ = نق^٢$

∴ $٣ ل^٢ - جـ = نق^٢$

$نق^٢ = ٣ (\frac{١}{٦٤} (جـ + ١٦)^٢) - جـ$

$= \frac{٣}{٦٤} (جـ^٢ + ٣٢ جـ + ٢٥٦) - جـ$

$= \frac{٣}{٦٤} (جـ^٢ + \frac{٣٢}{٣} جـ + ٢٥٦)$

$= \frac{٣}{٦٤} [(جـ + \frac{١٦}{٣})^٢ + \frac{٢٠٤٨}{٩}]$

أقل قيمة نق عندما جـ = $\frac{-١٦}{٣}$

∴ $نق^٢ = \frac{٢٠٤٨}{٩} \times \frac{٣}{٦٤}$

∴ نق = $\sqrt{\frac{٣٢}{٣}} = \frac{٤\sqrt{٦}}{٣}$

ل = $\frac{-١}{٨} (\frac{-١٦}{٣} + ١٦) = \frac{-٤}{٣}$ = ك = ن

∴ المركز = $(\frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣})$

المعادلة : $(س - \frac{٤}{٣})^٢ + (ص - \frac{٤}{٣})^٢$

$+ (ع - \frac{٤}{٣})^٢ = \frac{٣٢}{٣}$

حل آخر :

لكى تكون أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليس على استقامة واحدة فإنهم يقعوا جميعهم على أكبر دائرة فى الكرة يصنعوا مثلث متساوى الأضلاع أطوال أضلاعه = $٤\sqrt{٢}$

∴ نصف قطر الدائرة الخارجة = $\frac{٤\sqrt{٢}}{٢ جا ٦٠} = \frac{٤\sqrt{٦}}{٣}$

مركزها $(\frac{٤ + ٠ + ٠}{٣} ، \frac{٠ + ٤ + ٠}{٣} ، \frac{٠ + ٠ + ٤}{٣})$

$= (\frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣})$

∴ المعادلة : $(س - \frac{٤}{٣})^٢ + (ص - \frac{٤}{٣})^٢$

$+ (ع - \frac{٤}{٣})^٢ = \frac{٣٢}{٣}$

⑧ الكرة تمس مستويات الإحداثيات

س ع ، س ص ، ص ع

∴ مركز الكرة هو (± نق ، ± نق ، ± نق)

، ∵ الكرة تمر بالنقطة د (٣ ، ٦ ، ٣) والتى جميع إحداثياتها موجبة.

∴ إحداثيات المركز موجبة وهى (نق ، نق ، نق)

، ∵ أ نقطة تماس الكرة مع المستوى س ع

∴ أ (نق ، ٠ ، نق)

، ∵ $\overline{أد}$ قطر فى الكرة

∴ منتصف $\overline{أد}$ = مركز الكرة

∴ $(\frac{نق + ٣}{٢} ، \frac{٠ + ٦}{٢} ، \frac{نق + ٣}{٢})$ = (نق ، نق ، نق)

∴ نق = ٣ ، إحداثيات المركز (٣ ، ٣ ، ٣)

∴ معادلة الكرة هى :

$(س - ٣)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩$

٩

نوجد نقط تقاطع المحور س مع الكرة

المحور س معادلته ص = ٠ ، ع = ٠

من المعادلة :

$(س - ٢)^٢ + ٩ + ١ = ١٤$ $(س - ٢)^٢ = ٤$

س - ٢ = ± ٢ س = ٠ أو ٤

∴ النقط هى أ (٠ ، ٠ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠ ، ٠)

∴ أ ب = ٤ وحدة طول.

١٠

نفرض المركز هو (٠ ، ب ، ٠)

∴ المركز يُبعد مسافات متساوية عن النقط المعطاة

∴ $\sqrt{(١)^٢ + (٣ - ب)^٢ + ٢^٢}$

$= \sqrt{(-٢)^٢ + (٤ - ب)^٢ + ٢^٢}$

∴ $(٣ - ب)^٢ = ٨ + (٤ - ب)^٢$

[illegible]

[illegible]

∴ المركز (٠ ، [illegible] ، ٠)

[illegible]

[illegible]

١١

نفرض أن المعادلة

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ٢ ن ع + جـ = ٠$

∴ المركز = (-ل ، ٠ ، -ن)

حيث ك = ٠ يقع فى المستوى س ع.

، ∵ أ (٠ ، ٨ ، ٠) ∈ للكرة

٦٤ + جـ = ٠ جـ = -٦٤

، جـ (٠ ، ١٢ ، ٤) ∈ للكرة

٠ + ١٤٤ + ١٦ + ٨ ن - ٦٤ = ٠ ∴ ن = -١٢

، ب (٤ ، ٦ ، ٢) ∈ للكرة

١٦ + ٣٦ + ٤ + ٨ ل + ٤ ن - ٦٤ = ٠

٢ ل + ن = ٢

∴ ٢ ل = ١٤ ∴ ل = ٧

∴ المعادلة هى

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ١٤ س - ٢٤ ع - ٦٤ = ٠$

١٢

نوجد نقط تقاطع المحور س مع الكرة المحور س

معادلته ص = ٠ ، ع = ٠

من المعادلة $(س - ٣)^٢ + ١٦ + ١٤٤ = ١٦٩$

∴ س - ٣ = ± ٣ ∴ س = ٠ أو س = ٦

∴ النقط هى أ (٠ ، ٠ ، ٠) ، ب (٦ ، ٠ ، ٠)

وبالمثل نوجد نقط تقاطع المحور ص مع الكرة

بوضع س = ٠ ، ع = ٠

∴ $٩ + (ص + ٤)^٢ + ١٤٤ = ١٦٩$

∴ ص + ٤ = ± ٤ ∴ ص = ٠ أو ص = -٨

∴ النقط هى أ (٠ ، ٠ ، ٠) ، جـ (٠ ، -٨ ، ٠)

∴ النقط الثلاث أ ، ب ، جـ تصنع مثلث قائم [illegible]

رأسه أ (٠ ، ٠ ، ٠) ومركز المقطع منتصف ب جـ

(٣ ، -٤ ، ٠) ونصف قطره = ٥ وحدة طول.

∴ مساحة المقطع = $\pi نق^٢$ = ٢٥ π وحدة مربعة

١٣

∵ الكرة تمس المستوى س ع ونصف قطرها ٣

|م + ١| = ٣

∴ م + ١ = ٣ ∴ م = ٢

أو م + ١ = -٣ ∴ م = -٤

∵ الكرة تمس المستوى ص ع ونصف قطرها ٣

∴ |ل - ٢| = ٣

∴ ل - ٢ = ٣ ومنها ل = ٥ أو ل - ٢ = -٣

ومنها ل = -١

١٤

∵ الكرة تمس الأجزاء الموجبة من المحاور الثلاثة

∴ مركز الكرة هو (أ ، أ ، أ) حيث أ ∈ $ح^+$

، بعد المركز عن أى محور = نق

∴ $\sqrt{أ^٢ + أ^٢} = ٤\sqrt{٢}$

∴ $\sqrt{٢}$ أ = $٤\sqrt{٢}$ ∴ أ = ٤

∴ معادلة الكرة هى :

$(س - ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ٣٢$

١٥

∵ الكرة تمس محاور الإحداثيات الثلاثة

∴ |أ| = $٢\sqrt{٢}$ ∴ أ = ± $٢\sqrt{٢}$

∴ نصف قطر الكرة = بعد المركز عن أى محور

$= \sqrt{(٢\sqrt{٢})^٢ + (٢\sqrt{٢})^٢} = ٤$ وحدة طول

∴ معادلة الكرة هى

$(س - ٢\sqrt{٢})^٢ + (ص - ٢\sqrt{٢})^٢$

$+ (ع - ٢\sqrt{٢})^٢ = ١٦$

أو

$(س + ٢\sqrt{٢})^٢ + (ص - ٢\sqrt{٢})^٢$

$+ (ع - ٢\sqrt{٢})^٢ = ١٦$

١٦

① (ب)	② (ب)	③ (جـ)	④ (د)
⑤ (د)	⑥ (أ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (ب)	⑫ (جـ)

إرشادات لحل رقم **١٦** :

① ∵ الكرة تمس محورى الإحداثيات س ، ص

∴ $\sqrt{(م - ١)^٢ + (٥)^٢} = \sqrt{(٣)^٢ + (٥)^٢}$

∴ $(م - ١)^٢ = (٣)^٢ = ٩$

∴ م - ١ = ± ٣ ∴ م = ١ ± ٣

∴ م = ٤ أو -٢

∴ مركز الكرة هى (٣ ، ٣ ، ٥) أو (٣ ، -٣ ، ٥)

، نق = $\sqrt{(٣)^٢ + (٥)^٢} = \sqrt{٣٤}$

∴ معادلة الكرة هى

$(س - ٣)^٢ + (ص ± ٣)^٢ + (ع - ٥)^٢ = ٣٤$

② لكى تكون أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليس على استقامة واحدة فإنهم يقعوا جميعهم على أكبر دائرة فى الكرة ويصنعوا مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه

$= \sqrt{(٠ - ٥)^٢ + (٠ - ٠)^٢ + (٥ - ٠)^٢} = ٥\sqrt{٢}$

∴ نصف قطر الدائرة الخارجة = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢ جا ٦٠} = \frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$

③ لكى تكون أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليس على استقامة واحدة فإنهم يقعوا جميعهم على أكبر دائرة فى الكرة ويصنعوا مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه

[illegible]

∴ نصف قطر الدائرة الخارجة = [illegible]

④ ∵ المحاور س ، ص ، ع تقسم الفراغ إلى ٨ [illegible]

∴ عدد الكرات التى تمس محاور الإحداثيات الثلاثة = ٨ كرات.

⑤ ∵ الكرة تمس مستويات الإحداثيات [illegible]

∴ مركز الكرة = (٨ ، ٨ ، ٨) حيث [illegible]

المركز موجبة

معادلة الكرة هى

(س − ٨)^{٢} + (ص − ٨)^{٢} + (ع − ٨)^{٢} = ٦٤

⑥ ∵ الكرة تمس محاور الإحداثيات الموجبة

∴ نق = ٨ وحدات

∴ مركز الكرة = $(\frac{٨}{\sqrt{٢}}، \frac{٨}{\sqrt{٢}}، \frac{٨}{\sqrt{٢}})$

= $(٤\sqrt{٢}، ٤\sqrt{٢}، ٤\sqrt{٢})$

∴ معادلة الكرة هى (س − $٤\sqrt{٢}$)^{٢}

+ (ص − $٤\sqrt{٢}$)^{٢} + (ع − $٤\sqrt{٢}$)^{٢} = ٦٤

⑦ ∵ الكرة تمس جميع أوجه المكعب

∴ طول قطر الكرة = طول ضلع المكعب = ١٠ سم

∴ نق = ٥ سم

∵ أحد رؤوس المكعب هى نقطة الأصل

∴ الكرة تمس مستويات الإحداثيات

∴ مركز الكرة هى (٥ ، ٥ ، ٥) حيث إن

إحداثيات المركز موجبة

∴ معادلة الكرة (س − ٥)^{٢} + (ص − ٥)^{٢}

+ (ع − ٥)^{٢} = ٢٥

أى أن س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ١٠ س − ١٠ ص

− ١٠ ع + ٥٠ = ٠

⑧ ∵ الكرة تمر برؤوس المكعب

∴ طول قطر الكرة = طول قطر المكعب = ١٢ $\sqrt{٣}$

∴ نق = ٦ $\sqrt{٣}$

∴ معادلة الكرة هى س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ١٠٨

⑨ ∵ مركز الكرة قبل الانتقال هو (٢ ، −١ ، ٣)

∴ الانتقال = (٣ ، ٠ ، ٠)

∴ مركز الكرة بعد الانتقال = (٥ ، −١ ، ٣)

∴ معادلة الكرة بعد الانتقال هى

(س − ٥)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٩

⑩ لإيجاد نقط تقاطع الكرة مع محور الصادات

نضع س = ٠ ، ع = ٠

∴ (س − ١)^{٢} + ٤ + ١ = ٦

∴ (س − ١)^{٢} = ١ ∴ س − ١ = ±١

∴ س = ٢ ، صفر

∴ نقط التقاطع مع محور الصادات هى (٠ ، ٢ ، ٠) ، (٠ ، −٢ ، ٠)

⑪ ∵ نصف قطر الكرة = $\sqrt{٧٥}$ = ٥ $\sqrt{٣}$ وحدة طول

∵ الكرة تمر برؤوس المكعب.

∴ طول قطر المكعب = طول قطر الدائرة

= ١٠ $\sqrt{٣}$ وحدة طول.

∴ طول حرف المكعب = ١٠ وحدة طول

∴ المساحة الكلية للمكعب = ٦ ل^{٢} = ٦ (١٠)^{٢}

= ٦٠٠ وحدة مربعة.

⑫ ∵ معادلة المستوى س ص هى ع = ٠ ... (١)

∵ معادلة الكرة هى (س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢}

+ (ع − ١٢)^{٢} = ١٦٩ ... (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) معًا

∴ (س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} + (٠ − ١٢)^{٢} = ١٦٩

∴ (س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٢٥

وهى معادلة دائرة طول نصف قطرها ٥ وحدات

∴ مساحتها = π نق^{٢} = ٢٥ π وحدة مربعة

إجابات تمارين 2

١

$\overrightarrow{س ص} = \overrightarrow{ص ع}$ ، $\overrightarrow{ص ع} = \overrightarrow{ع ق}$

٢

① $|\overrightarrow{أ ب}| = \sqrt{٢^{٢} + (-١)^{٢} + ٠^{٢}} = \sqrt{٥}$

② $|\overrightarrow{أ ب}| = \sqrt{٢^{٢} + ٠^{٢} + (-٢)^{٢}} = ٢\sqrt{٢}$

① $\overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{ج ء}$ ⇒ (س − ٢ ، ص − ٣ ، ع − ٤) = (٤ ، ٦ ، ٢)

∴ س − ٢ = ٤ ، ص − ٣ = ٦ ، ع − ٤ = ٢

∴ س = ٦ ، ص = ٩ ، ع = ٦

∴ ء (٦ ، ٩ ، ٦)

② $\overrightarrow{ب ج} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{أ ب}$ ⇒ (س − ٢ ، ص − ٣ ، ع − ٤) = $\frac{١}{٢}$ (٤ ، ٦ ، ٢)

= (٢ ، ٣ ، ١)

∴ س − ٢ = ٢ ، ص − ٣ = ٣ ، ع − ٤ = ١

∴ س = ٤ ، ص = ٦ ، ع = ٥

∴ ج (٤ ، ٦ ، ٥)

③ $\overrightarrow{ب ج} = -\frac{١}{٢}\overrightarrow{أ ب}$ ⇒ (س − ٢ ، ص − ٣ ، ع − ٤) = $-\frac{١}{٢}$ (٤ ، ٦ ، ٢)

= (−٢ ، −٣ ، −١)

∴ س − ٢ = −٢ ، ص − ٣ = −٣ ، ع − ٤ = −١

∴ س = ٠ ، ص = ٠ ، ع = ٣

∴ ج (٠ ، ٠ ، ٣)

٤

① $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب ج}$ ⇒ (٦ ، ٥ ، ١٠) − (س ، ص ، ع) = (٤ ، ٩ ، ٨)

∴ ٦ − س = ٤ ، ٥ − ص = ٩ ، ١٠ − ع = ٨

∴ س = ٢ ، ص = −٤ ، ع = ٢

∴ ج (٢ ، −٤ ، ٢)

② $\overrightarrow{أ ب} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{ب ج}$ ⇒ (٦ ، ٥ ، ١٠) − (س ، ص ، ع) = $\frac{١}{٢}$ (٤ ، ٩ ، ٨)

= (٢ ، $\frac{٩}{٢}$ ، ٤)

∴ ٦ − س = ٢ ، ٥ − ص = $\frac{٩}{٢}$ ، ١٠ − ع = ٤

∴ س = ٤ ، ص = $\frac{١}{٢}$ ، ع = ٦

∴ ج (٤ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٦)

③ $\overrightarrow{أ ب} = -\frac{١}{٢}\overrightarrow{ب ج}$ ⇒ (٦ ، ٥ ، ١٠) − (س ، ص ، ع) = $-\frac{١}{٢}$ (٤ ، ٩ ، ٨)

= (−٢ ، $-\frac{٩}{٢}$ ، −٤)

∴ ٦ − س = −٢ ، ٥ − ص = $-\frac{٩}{٢}$ ، ١٠ − ع = −٤

∴ س = ٨ ، ص = $\frac{١٩}{٢}$ ، ع = ١٤

∴ ء (٨ ، $\frac{١٩}{٢}$ ، ١٤)

٥

① $\overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{ج ء} - \overrightarrow{ب ء}$ = (٠ ، −١٥ ، ٥) − (٠ ، −٤ ، ٤)

= (٠ ، −١١ ، ١)

② $\overrightarrow{أ ب} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{ب ج} + \frac{١}{٢}\overrightarrow{ب ء}$ ∴ $\overrightarrow{أ ء} = \overrightarrow{ب ء} - \overrightarrow{أ ب}$

$\overrightarrow{أ ب} = \frac{١}{٢}$ (٠ ، −١١ ، ١) + (٠ ، −٤ ، ٤)

= $(٠ ، -\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}) + (٠ ، -\frac{٨}{٢} ، \frac{٨}{٢})$

= $(٠ ، -\frac{٩}{٢} ، \frac{٩}{٢})$

٦

∵ $\overrightarrow{أ ء} = \overrightarrow{ب ء} - \overrightarrow{أ ب}$ = $\overrightarrow{ب ء} - \frac{١}{٢}\overrightarrow{ب ج}$

= (٠ ، −٤ ، ٤) − (٠ ، −١١ ، ١)

= (٠ ، ٧ ، ٣)

∴ $\overrightarrow{أ ء} = \frac{٣}{٢}\overrightarrow{ج ء}$

٧

① (ب) ② (ج) ③ (ب) ④ (أ) ⑤ (د) ⑥ (ب) ⑦ (ب)

⑧ (أ) ⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (د) ⑫ (ب) ⑬ (ب) ⑭ (ب)

① $|\overrightarrow{أ ب}| = \sqrt{٠^{٢} + (-١)^{٢} + (٢\sqrt{٢})^{٢}} = ٧$

② $|\overrightarrow{ب ج}| = \sqrt{٠^{٢} + ٠^{٢} + ٢^{٢}} = ٢$

③ $|\overrightarrow{ج أ}| = \sqrt{٠^{٢} + ١^{٢} + (-٢)^{٢}} = \sqrt{٥}$

٣

① $\overrightarrow{أ ب} = -\frac{١}{٢}\overrightarrow{ج ء}$ = $-\frac{١}{٢}$ (٠ ، −٧ ، ٢)

= (٠ ، $\frac{٧}{٢}$ ، −١)

② $\overrightarrow{ب ج} - \overrightarrow{ء ج} = \overrightarrow{ب ء}$ ∴ $\overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{ب ء} + \overrightarrow{ء ج}$

= (٠ ، −١٧ ، ٦) + (٠ ، −٧ ، ٢)

= (٠ ، −٢٤ ، ٨)

③ $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ج} + \overrightarrow{ج ء} + \overrightarrow{ء أ} = \overrightarrow{٠}$

∴ $\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ج} + \overrightarrow{ج ء} = \overrightarrow{ء أ}$

= (٠ ، ٧ ، −٢) + (٠ ، −٢٤ ، ٨) + (٠ ، ١٧ ، −٦)

= (٠ ، ٠ ، ٠)

٤

① $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب ج}$ ⇒ (٦ ، ٥ ، ١٠) − (س ، ص ، ع) = (٨ ، −٩ ، ٢)

∴ ٦ − س = ٨ ، ٥ − ص = −٩ ، ١٠ − ع = ٢

∴ س = −٢ ، ص = ١٤ ، ع = ٨

∴ ج (−٢ ، ١٤ ، ٨)

② $\overrightarrow{أ ب} = -\frac{١}{٢}\overrightarrow{ب ج}$ ⇒ (٦ ، ٥ ، ١٠) − (س ، ص ، ع) = $-\frac{١}{٢}$ (٨ ، −٩ ، ٢)

= (−٤ ، $\frac{٩}{٢}$ ، −١)

∴ س = ١٠ ، ص = $\frac{١}{٢}$ ، ع = ١١

∴ ء (١٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١١)

③ $\overrightarrow{ب ج} = \frac{٢}{٣}\overrightarrow{ب ء}$ ⇒ (٠ ، ٠ ، ٢) − (٠ ، ٠ ، ٠) = $\frac{٢}{٣}$ (س − ٠ ، ص − ٠ ، ع − ٠)

(٠ ، ٠ ، ٢) = $(\frac{٢}{٣}س ، \frac{٢}{٣}ص ، \frac{٢}{٣}ع)$

∴ $\frac{٢}{٣}$ س = ٠ ، $\frac{٢}{٣}$ ص = ٠ ، $\frac{٢}{٣}$ ع = ٢

∴ س = ٠ ، ص = ٠ ، ع = ٣

∴ ء (٠ ، ٠ ، ٣)

٥

① $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب ج}$ ⇒ (٦ ، ٥ ، ١٠) − (س ، ص ، ع) = (٤ ، ٩ ، ٨)

∴ ٦ − س = ٤ ، ٥ − ص = ٩ ، ١٠ − ع = ٨

∴ س = ٢ ، ص = −٤ ، ع = ٢

∴ ج (٢ ، −٤ ، ٢)

② $\overrightarrow{أ ب} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{ب ج}$ ⇒ (٦ ، ٥ ، ١٠) − (س ، ص ، ع) = $\frac{١}{٢}$ (٤ ، ٩ ، ٨)

= (٢ ، $\frac{٩}{٢}$ ، ٤)

∴ س = ٤ ، ص = $\frac{١}{٢}$ ، ع = ٦

∴ ج (٤ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٦)

③ $\overrightarrow{أ ب} = -\frac{١}{٢}\overrightarrow{ب ج}$ ⇒ (٦ ، ٥ ، ١٠) − (س ، ص ، ع) = $-\frac{١}{٢}$ (٤ ، ٩ ، ٨)

= (−٢ ، $-\frac{٩}{٢}$ ، −٤)

∴ ٦ − س = −٢ ، ٥ − ص = $-\frac{٩}{٢}$ ، ١٠ − ع = −٤

∴ س = ٨ ، ص = $\frac{١٩}{٢}$ ، ع = ١٤

∴ ء (٨ ، $\frac{١٩}{٢}$ ، ١٤)

٦

① $\overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{ج ء} - \overrightarrow{ب ء}$ = (٠ ، −١٥ ، ٥) − (٠ ، −٤ ، ٤)

= (٠ ، −١١ ، ١)

② $\overrightarrow{أ ب} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{ب ج} + \frac{١}{٢}\overrightarrow{ب ء}$ ∴ $\overrightarrow{أ ء} = \overrightarrow{ب ء} - \overrightarrow{أ ب}$

$\overrightarrow{أ ب} = \frac{١}{٢}$ (٠ ، −١١ ، ١) + (٠ ، −٤ ، ٤)

= $(٠ ، -\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}) + (٠ ، -\frac{٨}{٢} ، \frac{٨}{٢})$

= $(٠ ، -\frac{٩}{٢} ، \frac{٩}{٢})$

٧

∵ $\overrightarrow{أ ء} = \overrightarrow{ب ء} - \overrightarrow{أ ب}$ = $\overrightarrow{ب ء} - \frac{١}{٢}\overrightarrow{ب ج}$

= (٠ ، −٤ ، ٤) − (٠ ، −١١ ، ١)

= (٠ ، ٧ ، ٣)

∴ $\overrightarrow{أ ء} = \frac{٣}{٢}\overrightarrow{ج ء}$

٨

① (ب) ② (ج) ③ (ب) ④ (أ) ⑤ (د) ⑥ (ب) ⑦ (ب)

⑧ (أ) ⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (د) ⑫ (ب) ⑬ (ب) ⑭ (ب)

إجابات تمارين 1

أولًا تمارين على نظام الأعداد في الفضاء في ثلاثة أبعاد

١

٢

① $أ ب = \sqrt{(٧-١)^٢ + (٠-٠)^٢ + (٤-٠)^٢} = \sqrt{٥٢}$

② $أ ب = \sqrt{(٤-٢)^٢ + (١-١)^٢ + (٩-٦)^٢}$
$= \sqrt{١٣}$

③ $أ ب = \sqrt{(١+٢)^٢ + (٣+١)^٢ + (-٧+٧)^٢} = ٥$

٣

① $\left(\frac{٤+١}{٢}، \frac{(-٣)+(-١)}{٢}، \frac{٤+٢}{٢}\right)$
$= \left(\frac{٥}{٢}، -٢، ٣\right)$

② $\left(\frac{٢+(-٦)}{٢}، \frac{٥+٣}{٢}، \frac{-٣+٤}{٢}\right) = (-٢، ٤، ١)$

③ $\left(\frac{-٢+(-٦)}{٢}، \frac{٥+٤}{٢}، \frac{٨+٥}{٢}\right)$
$= \left(-٤، \frac{٩}{٢}، \frac{١٣}{٢}\right)$

④ $\left(\frac{٥+٤}{٢}، \frac{٢+١}{٢}، \frac{٦+١}{٢}\right) = \left(\frac{٩}{٢}، \frac{٣}{٢}، \frac{٧}{٢}\right)$

٤

١	(ب)	٢	(ج)	٣	(د)	٤	(أ)	٥	(ب)
٦	(ج)	٧	(د)	٨	(أ)	٩	(ب)	١٠	(ج)
١١	(د)	١٢	(ب)	١٣	(ج)	١٤	(أ)	١٥	(ب)
١٦	(ج)	١٧	(د)	١٨	(ب)	١٩	(ج)	٢٠	(د)
٢١	(ب)	٢٢	(ب)	٢٣	(ب)	٢٤	(ب)	٢٥	(ج)
٢٦	(د)	٢٧	(ب)	٢٨	(ب)	٢٩	(ج)	٣٠	(د)
٣١	(ب)	٣٢	(ج)	٣٣	(أ)				

٣٤ أولًا : (ب) ثانيًا : (ب)
٣٥ أولًا : (ب) ثانيًا : (د) ثالثًا : (ب)
٣٦ أولًا : (ج) ثانيًا : (ب) ثالثًا : (ج)
رابعًا : (ك)

٥

و $(٠، ٠، ٠)$ ، أ $(٣، ٠، ٠)$
ب $(٣، ٣، ٠)$ ، حـ $(٠، ٣، ٠)$
د $(٠، ٠، ٣)$ ، أ $(٣، ٠، ٣)$
ب $(٣، ٣، ٣)$ ، حـ $(٠، ٣، ٣)$

٦

① $\because$ ك + ٣ = ٠ $\therefore$ ك = −٣
$\therefore$ أ $(٤، -٦، ٠)$

② $\because$ م − ٣ = ٠ $\therefore$ م = ٣ أ $(٧، ٠، ٣)$

③ $\because$ ن + ٤ = ٥ $\therefore$ ن = ١ أ $(٥، ٥، ١)$

④ $\because$ أ ل^٢ + ل^٢ = $(٢\sqrt{٥})^٢$

$\therefore$ ٥ ل^٢ = ٢٠ $\therefore$ ل^٢ = ٤ $\therefore$ ل = ± ٢

أ $(٧، ٤، ٢)$ أو أ $(٣، -٤، -٢)$

⑤ $\because$ أ $\in$ محور س $\therefore$ ٢ م − ن = ٠ (١)

، م + ن = −٣ (٢)

بحل (١) ، (٢) معًا ينتج أن : م = −١ ، ن = −٢

$\therefore$ أ $(-١، ٠، ٠)$

٧

① $أ ب = \sqrt{(-١-١)^٢ + (-١-٣)^٢ + (-٤-٠)^٢} = \sqrt{٣٢}$

$ب حـ = \sqrt{(-٢-١)^٢ + (-٢-٣)^٢ + (-٨-٠)^٢} = \sqrt{٩٦}$

$أ حـ = \sqrt{(-٢-٣)^٢ + (-٢-٣)^٢ + (-١٢-٠)^٢} = \sqrt{٩٦}$

$\because أ حـ = أ ب + ب حـ$

$\therefore$ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

② $أ ب = \sqrt{٤^٢ + ١٠^٢ + ١^٢} = ٣\sqrt{١٢}$

$ب حـ = \sqrt{٨^٢ + ٢^٢ + ٢^٢} = ٦\sqrt{٩}$

$أ حـ = \sqrt{١٢^٢ + ٤^٢ + ٣^٢} = ٩\sqrt{٩}$

$\because أ حـ = أ ب + ب حـ$

$\therefore$ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

٨

$أ ب = \sqrt{١^٢ + ٣^٢ + (-٢)^٢} = \sqrt{١٤}$

$ب حـ = \sqrt{(-٣)^٢ + (-٢)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{١٤}$

$أ حـ = \sqrt{(-٢)^٢ + (١)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{١٤}$

$\because أ ب = ب حـ = أ حـ$

$\therefore$ Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع.

مساحته $= \frac{١}{٢} \times \sqrt{١٤} \times \sqrt{١٤} \times$ جا ٦٠°

$= \frac{٧\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة.

٩

① $أ ب = \sqrt{٤^٢ + (-٥)^٢ + ٢^٢} = ٣\sqrt{٥}$

$ب حـ = \sqrt{٣^٢ + (-٧)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{٥٩}$

$أ حـ = \sqrt{١^٢ + ٢^٢ + ٢^٢} = \sqrt{١٤}$

$\because (أ ب)^٢ + (أ حـ)^٢ = (ب حـ)^٢$

$\therefore$ Δ أ ب حـ قائم في أ

$\therefore$ مساحته $= \frac{١}{٢} \times ٣\sqrt{٥} \times \sqrt{١٤}$

$= \frac{٧\sqrt{٢}}{٢}$ وحدة مربعة.

١٠

$أ ب = \sqrt{٢^٢ + (-٢)^٢ + (-١)^٢} = ٣$

$ب حـ = \sqrt{٢^٢ + (-٢)^٢ + ١^٢} = ٣$

$أ حـ = \sqrt{٤^٢ + (-٤)^٢ + (-)^٢} = ٤\sqrt{٢}$

$\because أ ب = ب حـ$

$\therefore$ Δ أ ب حـ متساوي الساقين.

١١

$أ ب = \sqrt{٢^٢ + (-٥)^٢ + (٣-ق)^٢} = \sqrt{٨ + (٣-ق)^٢}$

$ب حـ = \sqrt{٢^٢ + (-٣)^٢ + (ق-٣)^٢}$

$= \sqrt{٨ + (ق-٣)^٢}$

$\therefore أ ب = ب حـ$ لجميع قيم ق

$\therefore$ Δ أ ب حـ متساوي الساقين.

$\because أ حـ = \sqrt{٤^٢ + (-٤)^٢ + ٠^٢} = ٤\sqrt{٢}$

Δ أ ب حـ يكون متساوي الأضلاع إذا كان

$٨ + (ق-٣)^٢ = ٤\sqrt{٢}$

$\therefore ٨ + (ق-٣)^٢ = ٣٢$ $\therefore (ق-٣)^٢ = ٢٤$

$\therefore ق - ٣ = \pm ٢\sqrt{٦}$ $\therefore ق = ٣ \pm ٢\sqrt{٦}$

١٢

نجعل ب $(س، ص، ع)$

$\left(\frac{٤+س}{٢}، \frac{-١+ص}{٢}، \frac{٣+ع}{٢}\right) = (٠، ٠، ٥)$

$\frac{٤+س}{٢} = ٠$	$\frac{-١+ص}{٢} = ٠$	$\frac{٣+ع}{٢} = ٥$
$٤ + س = ٠$	$-١ + ص = ٠$	$٣ + ع = ١٠$
$س = -٤$	$ص = ١$	$ع = ٧$

$\therefore$ ب $(-٤، ١، ٧)$

١٣

نجعل أ $(س، ص، ع)$

$\left(\frac{٤+س}{٢}، \frac{-٢+ص}{٢}، \frac{ع+١}{٢}\right) = (-١، ٤، ٠)$

$\frac{٤+س}{٢} = -١$	$\frac{-٢+ص}{٢} = ٤$	$\frac{ع+١}{٢} = ٠$
$٤ + س = -٢$	$-٢ + ص = ٨$	$ع + ١ = ٠$
$س = -٦$	$ص = ١٠$	$ع = -١$

$\therefore$ أ $(-٦، ١٠، -١)$

١٤

$\left(\frac{ك-٢}{٢}، \frac{-١٠+ن}{٢}، \frac{م+٢-٢}{٢}\right)$
$= (-١، ٦، -٥)$

$\frac{ك}{٢} = -١$	$\frac{ن-٨}{٢} = ٦$	$\frac{م+١}{٢} = -٥$
$ك = -٢$	$ن - ٨ = ١٢$	$م + ١ = -١٠$
	$ن = ٢٠$	$م = -١١$

$\therefore ك + م - ن = -٢ + (-١١) - ٢٠ = -٣٣$

١٥

ء منتصف $\overline{أ ب} = (٤، ١، ١)$

$\because$ ء منتصف $\overline{ب حـ} = (١، ٢، ٠)$

و منتصف $\overline{أ حـ} = (-١، ٦، ٠)$

$و ء = \sqrt{٣^٢ + (-١)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{١١}$

$ء و = \sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + (٢)^٢} = ٢\sqrt{٦} = \sqrt{٢٤}$

$و ء = \sqrt{٥^٢ + (-٥)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٥١}$

المحيط $= \sqrt{١١} + ٢\sqrt{٦} + \sqrt{٥١} = ١٥.١$

١٦

$\because (س، ٠، ٠)$ ، ب $(٠، ص، ٠)$ ، حـ $= (٠، ٠، ع)$

$\therefore \left(\frac{س}{٢}، \frac{ص}{٢}، ٠\right) = (١، -١، ٠)$

$\therefore س = ٢$ ، $ص = -٢$

$\therefore \left(٠، \frac{ص}{٢}، \frac{ع}{٢}\right) = (٠، -١، ٢)$

$\therefore ص = -٢$ ، $ع = ٤$

$\therefore$ منتصف $\overline{أ حـ}$ هي $\left(\frac{٢+٠}{٢}، \frac{٠+٠}{٢}، \frac{٠+٤}{٢}\right)$

$= (١، ٠، ٢)$

١٧

① $أ ب = \sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + (-٢)^٢} = ٣$

$ب حـ = \sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + ١^٢} = ٣$

$ء د = \sqrt{٢^٢ + ٢^٢ + ١^٢} = ٣$

$أ حـ = \sqrt{٤^٢ + ١^٢ + (-١)^٢} = ٣\sqrt{٢}$

$ب ء = \sqrt{٠^٢ + ٣^٢ + ٣^٢} = ٣\sqrt{٢}$

$\therefore أ ب = ب حـ = حـ ء = ء أ$

، $أ حـ = ء ب$

$\therefore$ الشكل أ ب حـ ء مربع.

② $أ ب = \sqrt{٢^٢ + (-٣)^٢ + ٦^٢} = ٧$

$ب حـ = \sqrt{٦^٢ + ٢^٢ + (-٣)^٢} = ٧$

$حـ ء = \sqrt{٦^٢ + (-٣)^٢ + ٦^٢} = ٧$

$ء أ = \sqrt{٦^٢ + (٢)^٢ + (-٣)^٢} = ٧$

$\therefore أ ب = ب حـ = حـ ء = ء أ$

$\therefore$ الشكل أ ب حـ ء معين.

١٨

نرسم $\overline{أ هـ}$ فيقطع $\overline{و ء}$ في ه

ومن هندسة الشكل

فإن أ هـ و متوازي أضلاع

$\therefore$ ه منتصف كل من $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{و ء}$

$\because$ ه منتصف $\overline{و ء}$

$\therefore$ ه $= \left(\frac{٢+٠}{٢}، \frac{١+٠}{٢}، \frac{٠+٤}{٢}\right) = (١، \frac{١}{٢}، ٢)$

، ه منتصف $\overline{أ هـ}$ حيث أ $= (س، ص، ٤)$

١٩

$\therefore س = ٢$ ، $ص = -٢٠$

$\left(٠، \frac{ص}{٢}، \frac{ع}{٢}\right) = (٠، -١٠، ٢٠)$

$\therefore ص = -٢٠$ ، $ع = ٤$

$\therefore$ منتصف $\overline{أ حـ}$ هي $\left(\frac{٢+٠}{٢}، ٠، \frac{٠+٤}{٢}\right)$

$= (١، ٠، ٢)$

٢٠

$\left(\frac{٢+س}{٢}، \frac{-١+ص}{٢}، \frac{٣+ع}{٢}\right) = (٠، ٠، ٥)$

$\frac{٢+س}{٢} = ٠$	$\frac{-١+ص}{٢} = ٠$	$\frac{٣+ع}{٢} = ٥$
$٢ + س = ٠$	$-١ + ص = ١٠$	$٣ + ع = ١٠$
$س = -٢$	$ص = ١١$	$ع = ٧$

$\therefore$ ب $(-٢، ١١، ٧)$

٢١

نجعل أ $(س، ص، ع)$

$\left(\frac{٤+س}{٢}، \frac{-٢+ص}{٢}، \frac{ع+١}{٢}\right) = (-١، ٤، ٠)$

$\frac{٤+س}{٢} = -١$	$\frac{-٢+ص}{٢} = ٤$	$\frac{ع+١}{٢} = ٠$
$٤ + س = -٢$	$-٢ + ص = ٨$	$ع + ١ = ٠$
$س = -٦$	$ص = ١٠$	$ع = -١$

$\therefore$ أ $(-٦، ١٠، -١)$

٢٢

$\left(\frac{ك-٢}{٢}، \frac{-١٠+ن}{٢}، \frac{م+٢-٢}{٢}\right)$
$= (-١، ٦، -٥)$

$\frac{ك}{٢} = -١$	$\frac{ن-٨}{٢} = ٦$	$\frac{م+١}{٢} = -٥$
$ك = -٢$	$ن - ٨ = ١٢$	$م + ١ = -١٠$
	$ن = ٢٠$	$م = -١١$

$\therefore ك + م - ن = -٢ + (-١١) - ٢٠ = -٣٣$

٢٣

ء منتصف $\overline{أ ب} = (٤، ١، ١)$

$\because$ ء منتصف $\overline{ب حـ} = (١، ٢، ٠)$

و منتصف $\overline{أ حـ} = (-١، ٦، ٠)$

$و ء = \sqrt{٣^٢ + (-١)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{١١}$

$ء و = \sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + (٢)^٢} = ٢\sqrt{٦} = \sqrt{٢٤}$

$و ء = \sqrt{٥^٢ + (-٥)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٥١}$

المحيط $= \sqrt{١١} + ٢\sqrt{٦} + \sqrt{٥١} = ١٥.١$

٢٤

$\because (س، ٠، ٠)$ ، ب $(٠، ص، ٠)$ ، حـ $= (٠، ٠، ع)$

$\therefore \left(\frac{س}{٢}، \frac{ص}{٢}، ٠\right) = (١، -١، ٠)$

$\therefore س = ٢$ ، $ص = -٢$

$\therefore \left(٠، \frac{ص}{٢}، \frac{ع}{٢}\right) = (٠، -١، ٢)$

$\therefore ص = -٢$ ، $ع = ٤$

$\therefore$ منتصف $\overline{أ حـ}$ هي $\left(\frac{٢+٠}{٢}، \frac{٠+٠}{٢}، \frac{٠+٤}{٢}\right)$

$= (١، ٠، ٢)$

٢٥

① $أ ب = \sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + (-٢)^٢} = ٣$

$ب حـ = \sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + ١^٢} = ٣$

$ء د = \sqrt{٢^٢ + ٢^٢ + ١^٢} = ٣$

$أ حـ = \sqrt{٤^٢ + ١^٢ + (-١)^٢} = ٣\sqrt{٢}$

$ب ء = \sqrt{٠^٢ + ٣^٢ + ٣^٢} = ٣\sqrt{٢}$

$\therefore أ ب = ب حـ = حـ ء = ء أ$

، $أ حـ = ء ب$

$\therefore$ الشكل أ ب حـ ء مربع.

② $أ ب = \sqrt{٢^٢ + (-٣)^٢ + ٦^٢} = ٧$

$ب حـ = \sqrt{٦^٢ + ٢^٢ + (-٣)^٢} = ٧$

$حـ ء = \sqrt{٦^٢ + (-٣)^٢ + ٦^٢} = ٧$

$ء أ = \sqrt{٦^٢ + (٢)^٢ + (-٣)^٢} = ٧$

$\therefore أ ب = ب حـ = حـ ء = ء أ$

$\therefore$ الشكل أ ب حـ ء معين.

٢٦

نرسم $\overline{أ هـ}$ فيقطع $\overline{و ء}$ في ه

ومن هندسة الشكل

فإن أ هـ و متوازي أضلاع

$\therefore$ ه منتصف كل من $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{و ء}$

$\because$ ه منتصف $\overline{و ء}$

$\therefore$ ه $= \left(\frac{٢+٠}{٢}، \frac{١+٠}{٢}، \frac{٠+٤}{٢}\right) = (١، \frac{١}{٢}، ٢)$

، ه منتصف $\overline{أ هـ}$ حيث أ $= (س، ص، ٤)$

٢٧

① $أ ب = \sqrt{(-١-١)^٢ + (-١-١)^٢ + (-٤-٠)^٢} = ٣\sqrt{٢}$

$ب حـ = \sqrt{(-٢-١)^٢ + (-٢-٣)^٢ + (-٨-٠)^٢} = ٩\sqrt{٢}$

$أ حـ = \sqrt{(-٢-٣)^٢ + (-٢-٣)^٢ + (-١٢-٠)^٢} = ٩\sqrt{٢}$

$\because أ حـ = أ ب + ب حـ$

$\therefore$ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

② $أ ب = \sqrt{٤^٢ + ١٠^٢ + ١^٢} = ٣\sqrt{١٢}$

$ب حـ = \sqrt{٨^٢ + ٢^٢ + ٢^٢} = ٦\sqrt{٩}$

$أ حـ = \sqrt{١٢^٢ + ٤^٢ + ٣^٢} = ٩\sqrt{٩}$

$\because أ حـ = أ ب + ب حـ$

$\therefore$ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

٢٨

$أ ب = \sqrt{(-١)^٢ + (-١)^٢ + (-٤)^٢} = ٣\sqrt{٢}$

$ب حـ = \sqrt{(-٢)^٢ + (-٢)^٢ + (-٨)^٢} = ٦\sqrt{٩}$

$أ حـ = \sqrt{(-٢)^٢ + (-٣)^٢ + (-١٢)^٢} = ٩\sqrt{٩}$

$\because أ حـ = أ ب + ب حـ$

$\therefore$ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

② $أ ب = \sqrt{٤^٢ + ١٠^٢ + ١^٢} = ٣\sqrt{١٢}$

$ب حـ = \sqrt{٨^٢ + ٢^٢ + ٢^٢} = ٦\sqrt{٩}$

$أ حـ = \sqrt{١٢^٢ + ٤^٢ + ٣^٢} = ٩\sqrt{٩}$

$\because أ حـ = أ ب + ب حـ$

$\therefore$ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

٢٩

① $أ ب = \sqrt{(-١-١)^٢ + (-١-١)^٢ + (-٤-٠)^٢} = ٣\sqrt{٢}$

$ب حـ = \sqrt{(-٢-١)^٢ + (-٢-٣)^٢ + (-٨-٠)^٢} = ٩\sqrt{٢}$

$أ حـ = \sqrt{(-٢-٣)^٢ + (-٢-٣)^٢ + (-١٢-٠)^٢} = ٩\sqrt{٢}$

$\because أ حـ = أ ب + ب حـ$

$\therefore$ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

② $أ ب = \sqrt{٤^٢ + ١٠^٢ + ١^٢} = ٣\sqrt{١٢}$

$ب حـ = \sqrt{٨^٢ + ٢^٢ + ٢^٢} = ٦\sqrt{٩}$

$أ حـ = \sqrt{١٢^٢ + ٤^٢ + ٣^٢} = ٩\sqrt{٩}$

$\because أ حـ = أ ب + ب حـ$

$\therefore$ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

٣٠

$أ ب = \sqrt{٢^٢ + (-٢)^٢ + (-١)^٢} = ٣$

$ب حـ = \sqrt{٢^٢ + (-٢)^٢ + ١^٢} = ٣$

$أ حـ = \sqrt{٤^٢ + (-٤)^٢ + (-)^٢} = ٤\sqrt{٢}$

$\because أ ب = ب حـ$

$\therefore$ Δ أ ب حـ متساوي الساقين.

٣١

$أ ب = \sqrt{٢^٢ + (-٥)^٢ + (٣-ق)^٢} = \sqrt{٨ + (٣-ق)^٢}$

$ب حـ = \sqrt{٢^٢ + (-٣)^٢ + (ق-٣)^٢}$

$= \sqrt{٨ + (ق-٣)^٢}$

$\therefore أ ب = ب حـ$ لجميع قيم ق

$\therefore$ Δ أ ب حـ متساوي الساقين.

$\because أ حـ = \sqrt{٤^٢ + (-٤)^٢ + ٠^٢} = ٤\sqrt{٢}$

Δ أ ب حـ يكون متساوي الأضلاع إذا كان

$٨ + (ق-٣)^٢ = ٤\sqrt{٢}$

$\therefore ٨ + (ق-٣)^٢ = ٣٢$ $\therefore (ق-٣)^٢ = ٢٤$

$\therefore ق - ٣ = \pm ٢\sqrt{٦}$ $\therefore ق = ٣ \pm ٢\sqrt{٦}$

٣٢

نجعل ب $(س، ص، ع)$

$\left(\frac{٤+س}{٢}، \frac{-١+ص}{٢}، \frac{٣+ع}{٢}\right) = (٠، ٠، ٥)$

$\frac{٤+س}{٢} = ٠$	$\frac{-١+ص}{٢} = ٠$	$\frac{٣+ع}{٢} = ٥$
$٤ + س = ٠$	$-١ + ص = ١٠$	$٣ + ع = ١٠$
$س = -٤$	$ص = ١١$	$ع = ٧$

$\therefore$ ب $(-٤، ١١، ٧)$

٣٣

نجعل أ $(س، ص، ع)$

$\left(\frac{٤+س}{٢}، \frac{-٢+ص}{٢}، \frac{ع+١}{٢}\right) = (-١، ٤، ٠)$

$\frac{٤+س}{٢} = -١$	$\frac{-٢+ص}{٢} = ٤$	$\frac{ع+١}{٢} = ٠$
$٤ + س = -٢$	$-٢ + ص = ٨$	$ع + ١ = ٠$
$س = -٦$	$ص = ١٠$	$ع = -١$

$\therefore$ أ $(-٦، ١٠، -١)$

٣٤

$\left(\frac{ك-٢}{٢}، \frac{-١٠+ن}{٢}، \frac{م+٢-٢}{٢}\right)$
$= (-١، ٦، -٥)$

$\frac{ك}{٢} = -١$	$\frac{ن-٨}{٢} = ٦$	$\frac{م+١}{٢} = -٥$
$ك = -٢$	$ن - ٨ = ١٢$	$م + ١ = -١٠$
	$ن = ٢٠$	$م = -١١$

$\therefore ك + م - ن = -٢ + (-١١) - ٢٠ = -٣٣$

٣٥

ء منتصف $\overline{أ ب} = (٤، ١، ١)$

$\because$ ء منتصف $\overline{ب حـ} = (١، ٢، ٠)$

و منتصف $\overline{أ حـ} = (-١، ٦، ٠)$

$و ء = \sqrt{٣^٢ + (-١)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{١١}$

$ء و = \sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + (٢)^٢} = ٢\sqrt{٦} = \sqrt{٢٤}$

$و ء = \sqrt{٥^٢ + (-٥)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٥١}$

المحيط $= \sqrt{١١} + ٢\sqrt{٦} + \sqrt{٥١} = ١٥.١$

٣٦

$\because (س، ٠، ٠)$ ، ب $(٠، ص، ٠)$ ، حـ $= (٠، ٠، ع)$

$\therefore \left(\frac{س}{٢}، \frac{ص}{٢}، ٠\right) = (١، -١، ٠)$

$\therefore س = ٢$ ، $ص = -٢$

$\therefore \left(٠، \frac{ص}{٢}، \frac{ع}{٢}\right) = (٠، -١، ٢)$

$\therefore ص = -٢$ ، $ع = ٤$

$\therefore$ منتصف $\overline{أ حـ}$ هي $\left(\frac{٢+٠}{٢}، \frac{٠+٠}{٢}، \frac{٠+٤}{٢}\right)$

$= (١، ٠، ٢)$

٣٧

① $أ ب = \sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + (-٢)^٢} = ٣$

$ب حـ = \sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + ١^٢} = ٣$

$ء د = \sqrt{٢^٢ + ٢^٢ + ١^٢} = ٣$

$أ حـ = \sqrt{٤^٢ + ١^٢ + (-١)^٢} = ٣\sqrt{٢}$

$ب ء = \sqrt{٠^٢ + ٣^٢ + ٣^٢} = ٣\sqrt{٢}$

$\therefore أ ب = ب حـ = حـ ء = ء أ$

، $أ حـ = ء ب$

$\therefore$ الشكل أ ب حـ ء مربع.

② $أ ب = \sqrt{٢^٢ + (-٣)^٢ + ٦^٢} = ٧$

$ب حـ = \sqrt{٦^٢ + ٢^٢ + (-٣)^٢} = ٧$

$حـ ء = \sqrt{٦^٢ + (-٣)^٢ + ٦^٢} = ٧$

$ء أ = \sqrt{٦^٢ + (٢)^٢ + (-٣)^٢} = ٧$

$\therefore أ ب = ب حـ = حـ ء = ء أ$

$\therefore$ الشكل أ ب حـ ء معين.

٣٨

نرسم $\overline{أ هـ}$ فيقطع $\overline{و ء}$ في ه

ومن هندسة الشكل

فإن أ هـ و متوازي أضلاع

$\therefore$ ه منتصف كل من $\overline{أ هـ}$ ، $\overline{و ء}$

$\because$ ه منتصف $\overline{و ء}$

$\therefore$ ه $= \left(\frac{٢+٠}{٢}، \frac{١+٠}{٢}، \frac{٠+٤}{٢}\right) = (١، \frac{١}{٢}، ٢)$

، ه منتصف $\overline{أ هـ}$ حيث أ $= (س، ص، ٤)$

ثانيًا تمارين على معادلة الكرة

١

① (هـ) ② (د) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (هـ)
⑥ (هـ) ⑦ (د) ⑧ (د) ⑨ (ب) ⑩ (هـ)
⑪ (أ) ⑫ (د) ⑬ (هـ) ⑭ (د) ⑮ (هـ)
⑯ (د) ⑰ (د) ⑱ (هـ) ⑲ (ب) ⑳ (هـ)
㉑ (ب) ㉒ (د) ㉓ (هـ) ㉔ (ب) ㉕ (هـ)
㉖ (د) ㉗ (هـ) ㉘ (هـ) ㉙ (د) ㉚ (هـ)
㉛ (ب) ㉜ (أ) ㉝ (د) ㉞ (د) ㉟ (أ)
㊱ (ب) ㊲ (ب)

٢

① $(س-٢)^٢ + (ص+١)^٢ + (ع-٤)^٢ = ٩$

② $(س-٤)^٢ + (ص+٢)^٢ + (ع-٣)^٢ = ٠$

③ $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٧$

④ ٢ نق $= \sqrt{٢^٢ + ٠^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{٢٠}$

$\therefore$ نق $= \frac{\sqrt{٢٠}}{٢}$ المركز $= \left(\frac{٢}{٢}، ٠، -٢\right)$

المعادلة $\left(س - \frac{٢}{٢}\right)^٢ + (ص - ٠)^٢ + (ع + ٢)^٢$

$= \frac{٢٠}{٤}$

٣

① المركز $= (٣، ٥، -٢)$ ، نق $=$

، حجمها $= \frac{٤}{٣}\pi \times (٥)^٣ = \frac{٥٠٠}{٣}\pi$

② المركز $= (٠، ٠، ٠)$ ، نق $= ٣\sqrt{٢}$

③ المركز $= (-٢، ١، ٣)$

، نق $= \sqrt{٤ + ١ + ٩ - ١١} = \sqrt{٣}$

④ نق $= \sqrt{٢٩}$ المركز $= \left(\frac{٣}{٢}، ٣، -١\right)$

المعادلة $\left(س - \frac{٣}{٢}\right)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع + ١)^٢$

$= \frac{٢٩}{٤}$

⑤ نق $= \sqrt{٢٩}$ المركز $= (٢، ٣، -٤)$

المعادلة $(س-٢)^٢ + (ص-٣)^٢ + (ع+٤)^٢ = ٢٩$

⑥ نق $= \sqrt{٢٩}$ المركز $= (٢، ٣، -٤)$

$\therefore$ نق $= \sqrt{٢٩}$

المعادلة $(س-٢)^٢ + (ص-٣)^٢ + (ع+٤)^٢ = ٢٩$

⑦ نق $= \sqrt{١^٢ + ٥^٢ + ٤^٢} = \sqrt{٤٢}$

المعادلة

$(س-١)^٢ + (ص+٦)^٢ + (ع-١)^٢ = ٤٢$

⑧ الكرة تمس المستوى س ص $\therefore$ نق $= ٣$

المعادلة

$(س+٢)^٢ + (ص+٥)^٢ + (ع-٣)^٢ = ٩$

⑨ نق $= ٤$

المعادلة $س^٢ + (ص-٤)^٢ + ع^٢ = ١٦$

⑩ $\therefore$ مركزها $(٣، -١، ٢)$

نق $= \sqrt{٩ + ١ + ٤ + ٤} = ٤$

$\therefore$ نق $= ٢ \times ٤ = ٨$

$\therefore$ المعادلة

$(س-٣)^٢ + (ص+١)^٢ + (ع-٢)^٢ = ٦٤$

⑪ $\therefore$ مركزها $(٢، ٢، ٣)$

المعادلة $(س-٢)^٢ + (ص-٢)^٢ + (ع-٣)^٢ = ٩$

٤

① $(س-٢)^٢ + (ص+١)^٢ + (ع-٤)^٢ = ٩$

② $(س-٤)^٢ + (ص+٢)^٢ + (ع-٣)^٢ = ٠$

③ $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٧$

④ ٢ نق $= \sqrt{٢^٢ + ٠^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{٢٠}$

$\therefore$ نق $= \frac{\sqrt{٢٠}}{٢}$ المركز $= \left(\frac{٢}{٢}، ٠، -٢\right)$

المعادلة $\left(س - \frac{٢}{٢}\right)^٢ + (ص - ٠)^٢ + (ع + ٢)^٢$

$= \frac{٢٠}{٤}$

٥

① المركز $= (٣، ٥، -٢)$ ، نق $=$

، حجمها $= \frac{٤}{٣}\pi \times (٥)^٣ = \frac{٥٠٠}{٣}\pi$

② المركز $= (٠، ٠، ٠)$ ، نق $= ٣\sqrt{٢}$

③ المركز $= (-٢، ١، ٣)$

، نق $= \sqrt{٤ + ١ + ٩ - ١١} = \sqrt{٣}$

④ نق $= \sqrt{٢٩}$ المركز $= \left(\frac{٣}{٢}، ٣، -١\right)$

المعادلة $\left(س - \frac{٣}{٢}\right)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع + ١)^٢$

$= \frac{٢٩}{٤}$

⑤ نق $= \sqrt{٢٩}$ المركز $= (٢، ٣، -٤)$

المعادلة $(س-٢)^٢ + (ص-٣)^٢ + (ع+٤)^٢ = ٢٩$

⑥ نق $= \sqrt{٢٩}$ المركز $= (٢، ٣، -٤)$

$\therefore$ نق $= \sqrt{٢٩}$

المعادلة $(س-٢)^٢ + (ص-٣)^٢ + (ع+٤)^٢ = ٢٩$

⑦ نق $= \sqrt{١^٢ + ٥^٢ + ٤^٢} = \sqrt{٤٢}$

المعادلة

$(س-١)^٢ + (ص+٦)^٢ + (ع-١)^٢ = ٤٢$

⑧ الكرة تمس المستوى س ص $\therefore$ نق $= ٣$

المعادلة

$(س+٢)^٢ + (ص+٥)^٢ + (ع-٣)^٢ = ٩$

⑨ نق $= ٤$

المعادلة $س^٢ + (ص-٤)^٢ + ع^٢ = ١٦$

⑩ $\therefore$ مركزها $(-١، ٢، ٣)$

نق $= \sqrt{٩ + ١ + ٤ + ٢} = ٤$

$\therefore$ نق $= ٢ \times ٤ = ٨$

$\therefore$ المعادلة

$(س+١)^٢ + (ص-٢)^٢ + (ع-٣)^٢ = ٦٤$

⑪ $\therefore$ مركزها $(٢، ٢، ٣)$

المعادلة $(س-٢)^٢ + (ص-٢)^٢ + (ع-٣)^٢ = ٩$

٩

① $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أحـ}$

$= ٩٠ \times \frac{١}{٢} \times ٢٦ = ٣٦$

② $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{حـء} = ٦ \times ٦ \times$ جتا $١٨٠° = -٣٦$

③ مركبة $\overrightarrow{حـء}$ فى اتجاه $\overrightarrow{سـحـ} = \frac{\overrightarrow{حـء} \cdot \overrightarrow{سـحـ}}{|\overrightarrow{سـحـ}|} =$ صفر

١١

$سـء = أحـ = ٨\sqrt{٢}$ سم

① $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{حـء} = ٨ \times ٨$ جتا $١٨٠° = -٦٤$

② $(٢\overrightarrow{سـحـ}) \cdot (\frac{١}{٢}\overrightarrow{أء}) = \frac{١}{٢}(\overrightarrow{سـحـ} \cdot \overrightarrow{أء})$

③ $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أحـ} = ٨ \times ٨\sqrt{٢} \times$ جتا $٤٥° = ٦٤$

④ $\overrightarrow{سـحـ} \cdot (٢\overrightarrow{سـء}) = ٢(\overrightarrow{سـحـ} \cdot \overrightarrow{سـء})$

$= ٢ \times ٨ \times ٨\sqrt{٢} \times$ جتا $١٣٥° = -١٢٨$

⑤ $\overrightarrow{أحـ} \cdot \overrightarrow{سـء} = ٨ \times ٨\sqrt{٢} \times$ جتا $٩٠° =$ صفر

١٢

$أحـ = سـء = \sqrt{٦^٢ + ٨^٢}$

$= ١٠$ سم

① $٢\overrightarrow{أء} \cdot ٢\overrightarrow{حـء}$

$= ٦(\overrightarrow{أء} \cdot \overrightarrow{حـء})$

$= ٦ \times ٨ \times ٦$ جتا $٩٠° =$ صفر

② $(-٢\overrightarrow{أء}) \cdot \overrightarrow{أحـ} = -٢(\overrightarrow{أء} \cdot \overrightarrow{أحـ})$

$= -٢ \times ٦ \times ١٠ \times \frac{٦}{١٠} = -٧٢$

③ $\overrightarrow{سـحـ} \cdot (\frac{٢}{٣}\overrightarrow{سـء}) = \frac{٢}{٣}(\overrightarrow{سـحـ} \cdot \overrightarrow{سـء})$

$= \frac{٢}{٣} \times ٨ \times ١٠$ جتا $(١٨٠° - هـ)$

$= -٢٠٠ \times$ جتا هـ

$= -٢٠٠ \times \frac{٤}{٥} = -١٦٠$

١٣

$أحـ = \sqrt{(٨)^٢ - (٤)^٢} = ٤\sqrt{٣}$ سم

$\therefore أم = ٢\sqrt{٣}$ سم

$\therefore سم = \sqrt{(٢\sqrt{٣})^٢ + (٤)^٢} = ٢\sqrt{٧}$ سم

$\therefore سء = ٤\sqrt{٧}$ سم

① $\overrightarrow{حـأ} \cdot \overrightarrow{حـب}$

$= ٤\sqrt{٣} \times ٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= ٤٨$

② $(\frac{١}{٣}\overrightarrow{أء}) \cdot (\frac{١}{٢}\overrightarrow{حـء})$

$= \frac{١}{٦}(\overrightarrow{أء} \cdot \overrightarrow{حـء}) = \frac{١}{٦} \times ٨ \times ٤ \times$ جتا $١٢٠°$

$= \frac{١٦}{٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{٨}{٦}$

③ $\overrightarrow{أب} \cdot (٢\sqrt{٣}\overrightarrow{أء}) = ٢\sqrt{٣}(\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أء})$

$= ٢\sqrt{٣} \times ٤ \times ٨ \times$ جتا $١٢٠°$

$= -١٦\sqrt{٣}$

④ $(٧\overrightarrow{سـء}) \cdot \overrightarrow{أحـ} = ٧ \times ٤\sqrt{٧} \times ٢\sqrt{٣} \times$ جتا $٣٠°$

$= ٧ \times ١٦ \times \sqrt{٧} \times ٢\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= ٣٣٦$

⑤ $\overrightarrow{أحـ} \cdot \overrightarrow{سـء} = ١٠ \times ١٠ \times$ جتا $٢هـ = ١٠٠$ جتا $٢هـ$

لكن: جتا $٢هـ = ٢$ جتا$^٢ هـ - ١ = ٢ \times (\frac{٤}{٥})^٢ - ١$

$= \frac{٣٢}{٢٥} - ١ = \frac{٧}{٢٥}$

$\therefore \overrightarrow{أحـ} \cdot \overrightarrow{سـء} = ١٠٠ \times \frac{٧}{٢٥} = ٢٨$

طريقة أخرى:

$\overrightarrow{أحـ} \cdot \overrightarrow{سـء} = (\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أحـ}) \cdot (\overrightarrow{سـحـ} + \overrightarrow{حـء})$

$= (\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{سـحـ}) + (\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{حـء}) + (\overrightarrow{سـحـ} \cdot \overrightarrow{حـء}) + (\overrightarrow{أحـ} \cdot \overrightarrow{حـء})$

$= (٦ \times ٨$ جتا $٩٠°) + (٦ \times ٦$ جتا $١٨٠°) + (٨ \times ٦$ جتا $٩٠°) + (٨ \times ٨$ جتا $٠°)$

$=$ صفر $- ٣٦ + ٦٤ +$ صفر $= ٢٨$

١٥

$\overrightarrow{سـء} = \overrightarrow{هـ} - \overrightarrow{سـ} = (٠ ، ٠ ، ٦) - (٤ ، ٨ ، ٦)$

$= (-٤ ، -٨ ، ٠)$

$\overrightarrow{حـأ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{حـ} = (٠ ، ٨ ، ٦) - (٤ ، ٠ ، ٦)$

$= (-٤ ، ٨ ، ٠)$

$\overrightarrow{سـء} \cdot \overrightarrow{حـأ} = (-٤ ، -٨ ، ٠) \cdot (-٤ ، ٨ ، ٠)$

$= ١٦ - ٦٤ + ٠ = -٤٨$

١٦

$\because \overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أحـ} = |\overrightarrow{أب}| |\overrightarrow{أحـ}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أحـ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أحـ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أحـ}| = ١$

١٧

① $\because \overrightarrow{حـأ} + \overrightarrow{أو} = \overrightarrow{حـو}$

$\therefore (\overrightarrow{حـأ} + \overrightarrow{أو}) \cdot \overrightarrow{أء}$

$= \overrightarrow{حـو} \cdot \overrightarrow{أء}$

$= ١٦ \times ١٦$ جتا $١٢٠°$

$= -١٢٨$

② $(\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{ده}) \cdot \overrightarrow{أء}$

$= \overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أء} - \overrightarrow{ده} \cdot \overrightarrow{أء}$

$= ٨ \times ١٦$ جتا $٦٠° - ٨ \times ١٦$ جتا $١٨٠° = ١٩٢$

١٨

① $٢\overrightarrow{حـأ} \cdot (-٣\overrightarrow{حـب}) = -٦(\overrightarrow{حـأ} \cdot \overrightarrow{حـب})$

$= -٦(-١ ، ٠ ، -٢) \cdot (٢ ، ٠ ، -٢)$

$= -٦$

② $\because \overrightarrow{أ} + \frac{١}{٢}\overrightarrow{أب} + ٢\overrightarrow{أء} = \overrightarrow{أ}$ ص $\therefore$ ٢ ص $= \frac{١}{٢}\overrightarrow{أب} + ٢\overrightarrow{أء}$

③ $٢\overrightarrow{سـحـ} + ٣\overrightarrow{حـء} = ٢(٢ ، ٠ ، -٢) + ٣(-١ ، ٠ ، ٢)$

$= (٤ ، ٠ ، -٤) + (-٣ ، ٠ ، ٦)$

$= (١ ، ٠ ، ٢)$

١٩

$\because \overrightarrow{سـحـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{سـ} = (٢ ، ٠ ، ١)$

$\because \overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{أ} = (١ ، -٣ ، -٥)$

$\therefore \overrightarrow{سـحـ} \cdot \overrightarrow{أحـ} = ٢ + ٣ - ٤ = ٠$

$\therefore \Delta$ أ ب حـ قائم فى حـ

٢٠

$\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (٤ ، ١ ، -١)$

$\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{حـ} = (-٢ ، ٣ ، -٥)$

$\therefore (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) \cdot (\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}) = -٨ + ٣ + ٥ =$ صفر

$\therefore$ المتجه $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})$ عمودى على المتجه $(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب})$

٢١

① (ب)	② (هـ)	③ (هـ)	④ (جـ)	⑤ (هـ)	⑥ (ب)	⑦ (هـ)	⑧ (هـ)	⑨ (د)	⑩ (ب)
⑪ (ب)	⑫ (د)	⑬ (د)	⑭ (هـ)	⑮ (هـ)	⑯ (ب)	⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (ب)	⑳ (هـ)
㉑ (ب)	㉒ (ب)	㉓ (ب)	㉔ (أ)	㉕ (ب)	㉖ (أ)	㉗ (ب)	㉘ (أ)	㉙ (أ)	㉚ (ب)
㉛ (ب)	㉜ (ب)	㉝ (ب)	㉞ (ب)	㉟ (أ)	㊱ (هـ)	㊲ (أ)	㊳ (هـ)	㊴ (ب)	㊵ (هـ)
㊶ (ب)	㊷ (ب)	㊸ (ب)	㊹ (أ)	㊺ (هـ)	㊻ (د)	㊼ (أ)	㊽ (أ)	㊾ (أ)	㊿ (هـ)
٥١ (هـ)	٥٢ (هـ)	٥٣ (ب)	٥٤ (أ)	٥٥ (ب)	٥٦ (ب)	٥٧ (ب)	٥٨ (ب)	٥٩ (ب)	٦٠ (هـ)
٦١ (هـ)	٦٢ (هـ)	٦٣ (ب)	٦٤ (ب)	٦٥ (ب)	٦٦ (ب)	٦٧ (ب)	٦٨ (ب)	٦٩ (ب)	٧٠ (هـ)
٧١ (هـ)	٧٢ (هـ)	٧٣ (ب)	٧٤ (ب)	٧٥ (ب)	٧٦ (ب)	٧٧ (ب)	٧٨ (ب)	٧٩ (ب)	٨٠ (هـ)
٨١ (هـ)	٨٢ (هـ)	٨٣ (ب)	٨٤ (ب)	٨٥ (ب)	٨٦ (ب)	٨٧ (ب)	٨٨ (ب)	٨٩ (ب)	٩٠ (هـ)
٩١ (هـ)	٩٢ (هـ)	٩٣ (ب)	٩٤ (ب)	٩٥ (ب)	٩٦ (ب)	٩٧ (ب)	٩٨ (ب)	٩٩ (ب)	١٠٠ (هـ)
١٠١ (هـ)	١٠٢ (هـ)	١٠٣ (ب)	١٠٤ (ب)	١٠٥ (ب)	١٠٦ (ب)	١٠٧ (ب)	١٠٨ (ب)	١٠٩ (ب)	١١٠ (هـ)
١١١ (هـ)	١١٢ (هـ)	١١٣ (ب)	١١٤ (ب)	١١٥ (ب)	١١٦ (ب)	١١٧ (ب)	١١٨ (ب)	١١٩ (ب)	١٢٠ (هـ)

٢٢

$\theta = \frac{(-٥ ، ٠ ، ٥) \cdot (٠ ، ٠ ، ٥)}{|(-٥ ، ٠ ، ٥)| |(٠ ، ٠ ، ٥)|}$

$= \frac{٢٥}{٥ \times ٥} = ١$

$\therefore \theta = ٠°$

٢٣

$\because$ أ ب $=$ ب حـ $=$ حـ أ $= ٤$ سم

$\therefore \Delta$ أ ب حـ متساوى الأضلاع

$\therefore$ ق $(\overrightarrow{أب} ، \overrightarrow{حـب}) = ٦٠°$

$\therefore \overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{حـب} = ٤ \times ٤$ جتا $٦٠° = ٨$

٢٤

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ٢$ جتا$^٢ \theta +$ لو$_٣$ س $\cdot$ لو$_س$ ٢٧ $+ ٢$ جتا θ

$= ١١$

لو$_٣$ س لو$_س$ ٢٧ $= ٩$ لو$_٣$ س $= \frac{٩}{\text{لو}_٣ ٢٧}$

$\therefore$ س $= ٢٧^{\frac{٩}{٣}} = ٤٠٩$

٢٥

$سـء = ٤ - سـ = (٠ ، ٠ ، ٦) - (٤ ، ٨ ، ٦)$

$= (-٤ ، -٨ ، ٠)$

$حـأ = أ - حـ = (٠ ، ٨ ، ٦) - (٤ ، ٠ ، ٦)$

$= (-٤ ، ٨ ، ٠)$

$سـء \cdot حـأ = (-٤ ، -٨ ، ٠) \cdot (-٤ ، ٨ ، ٠)$

$= ١٦ - ٦٤ + ٠ = -٤٨$

٢٦

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{ب}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{ب}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{ب}| = ١$

٢٧

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٢٨

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٢٩

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٣٠

$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (-٢ ، ك ، ٢) + (٠ ، ٢ ، ك)$

$\overrightarrow{حـ} = (٢ ، ١ ، ٠)$

في حالة أن المتجه $(\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب})$ يكون عموديًا على المتجه $\overrightarrow{حـ}$

$\therefore (-٢ ، ك ، ٢) \cdot (٢ ، ١ ، ٠) = ٠$

$\therefore -٤ + ك = ٠$ $\therefore ك = ٤$

٣١

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٣٢

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٣٣

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٣٤

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٣٥

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٣٦

من Δ أ ب حـ

$\overline{حـء}^٢ = \overline{أ}^٢ + \overline{ب}^٢ - ٢ \times ٢ \times ٦ \times$ جتا $٦٠°$

$= ٢\sqrt{٧}$ سم

$\therefore \overrightarrow{حـأ} \cdot \overrightarrow{حـب} = حـء \times حـب \times$ جتا $(د(حـب))$

$= \frac{٦^٢ - (٢\sqrt{٧})^٢ + ٢^٢}{٢ \times ٢\sqrt{٧} \times ٦} \times ٢ \times ٦ = ٣٠$

طريقة أخرى:

$\overrightarrow{حـأ} \cdot \overrightarrow{حـب} = (\overrightarrow{حـأ} + \overrightarrow{أء}) \cdot \overrightarrow{حـب}$

$= \overrightarrow{حـأ} \cdot \overrightarrow{حـب} + \overrightarrow{أء} \cdot \overrightarrow{حـب}$

$= ٦ \times ٦$ جتا $٦٠° + ٤ \times ٦$ جتا $٠° = ٣٠$

٣٧

$\because$ ق $(\overrightarrow{أب} ، \overrightarrow{حـء}) = ٩٠°$

$\therefore \overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{حـء} = ٠$

$\therefore$ المستقيمان متعامدان

٣٨

$\because$ جتا θ سالبة $\therefore \theta$ منفرجة

$\therefore ٧ك - ٦ك + ١ < ٠$ $\therefore ك + ١ < ٠$

$\therefore ك < -١$ $\therefore ك \in]-\infty ، -١[$

٣٩

$(أ + ب) \cdot (أ - ب)$

$= |أ|^٢ - أ \cdot ب + ب \cdot أ - |ب|^٢$

$= |أ|^٢ - |ب|^٢ = ٨$

$\therefore ٩|ب|^٢ - |ب|^٢ = ٨$

$\therefore |ب| = ١$ سم $\therefore |أ| = ٣$

٤٠

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٤١

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٤٢

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٤٣

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٤٤

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٤٥

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٤٦

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٤٧

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٤٨

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٤٩

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٥٠

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = |\overrightarrow{أ}| |\overrightarrow{ب}|$ جتا θ

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ}|^٢$ جتا $٦٠°$

$\therefore |\overrightarrow{أ}|^٢ = ١$ $\therefore |\overrightarrow{أ}| = ١$

٣٣

① $\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{أ ج} = \|\overrightarrow{أ ب}\| \|\overrightarrow{أ ج}\|$ جتا θ

$= ٣٠ \times ٤٠ \times$ جتا $٦٠°$

$= ٦٠٠$

② $\|\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ ج}\|^2 = \|\overrightarrow{أ ب}\|^2 + \|\overrightarrow{أ ج}\|^2 + ٢ (\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{أ ج})$

$= ٩٠٠ + ١٦٠٠ + ٢ \times ٦٠٠$

$= ٣٧٠٠$

$\|\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ ج}\| = \sqrt{٣٧٠٠} = ١٠ \sqrt{٣٧}$

③ مركبة $(\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ ج})$ فى اتجاه $\overrightarrow{أ ب}$

$= \dfrac{(\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ ج}) \cdot \overrightarrow{أ ب}}{\|\overrightarrow{أ ب}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{أ ب}\|^2 + \overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{أ ج}}{\|\overrightarrow{أ ب}\|}$

$= \dfrac{(٣٠)^2 + ٦٠٠}{٣٠} = ٥٠$

٣٤

① $\because \overrightarrow{أ ب} = (-٢ ، ٤ ، -٢)$ ، $\|\overrightarrow{أ ب}\| = ٢ \sqrt{٦}$

$\overrightarrow{ب ج} = (-١ ، ١ ، -٢)$ ، $\|\overrightarrow{ب ج}\| = \sqrt{٦}$

، $\overrightarrow{أ ج} = (-٣ ، ٥ ، -٤)$ ، $\|\overrightarrow{أ ج}\| = ٥ \sqrt{٢}$

، $\because$ ق $(د أ) = $ جتا$^{-١} \left(\dfrac{\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{أ ج}}{\|\overrightarrow{أ ب}\| \|\overrightarrow{أ ج}\|} \right)$

$\therefore$ ق $(د أ) = $ جتا$^{-١} \left(\dfrac{٦ + ٢٠ + ٨}{٣ \sqrt{٢٠}} \right) = ١١° \, ٢٦' \, ٢٢''$

، $\because$ ق $(د ب) = $ جتا$^{-١} \left(\dfrac{\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{ب ج}}{\|\overrightarrow{ب أ}\| \|\overrightarrow{ب ج}\|} \right)$

$\therefore$ ق $(د ب) = $ جتا$^{-١} \left(\dfrac{-٢٠ - ٤ - ٤}{١٢} \right)$

$= ١٤٦° \, ٢٦' \, ٤''$

، ق $(د ج) = ١٨٠° - (١١° \, ٢٦' \, ٢٢'' + ١٤٦° \, ٢٦' \, ٤'')$

$= ٣١' \, ٤''$

② $\overrightarrow{أ ب} = (-٣ ، ١٢ ، ٥)$ ، $\|\overrightarrow{أ ب}\| = \sqrt{١٧٨}$

$\overrightarrow{ب ج} = (٥ ، ١ ، -٩)$ ، $\|\overrightarrow{ب ج}\| = \sqrt{١٠٧}$

، $\overrightarrow{أ ج} = (٢ ، ١٣ ، -٤)$ ، $\|\overrightarrow{أ ج}\| = ٣ \sqrt{٢١}$

، $\because$ ق $(د أ) = $ جتا$^{-١} \left(\dfrac{\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{أ ج}}{\|\overrightarrow{أ ب}\| \|\overrightarrow{أ ج}\|} \right)$

$\therefore$ ق $(د أ) = $ جتا$^{-١} \left(\dfrac{-٦ + ١٥٦ - ٢٠}{\sqrt{١٧٨} \times ٣ \sqrt{٢١}} \right)$

$= ٥٦° \, ٥١' \, ٤٤''$

، $\because$ ق $(د ب) = $ جتا$^{-١} \left(\dfrac{\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{ب ج}}{\|\overrightarrow{ب أ}\| \|\overrightarrow{ب ج}\|} \right)$

$\therefore$ ق $(د ب) = $ جتا$^{-١} \left(\dfrac{١٥ - ١٢ + ٤٥}{\sqrt{١٧٨} \times \sqrt{١٠٧}} \right)$

$= ٤٨° \, ٢٨' \, ٦٩''$

، ق $(د ج) = ١٨٠° - (٥٦° \, ٥١' \, ٤٤'' + ٤٨° \, ٢٨' \, ٦٩'')$

$= ٦٦° \, ٢٩' \, ٦٥''$

③ $\overrightarrow{أ ب} = (-٢ ، -٢ ، -٣)$ ، $\|\overrightarrow{أ ب}\| = \sqrt{١٧}$

، $\overrightarrow{ب ج} = (١ ، ١ ، ٢)$ ، $\|\overrightarrow{ب ج}\| = \sqrt{٦}$

، $\overrightarrow{أ ج} = (-١ ، -١ ، -١)$ ، $\|\overrightarrow{أ ج}\| = \sqrt{٣}$

، $\because$ ق $(د أ) = $ جتا$^{-١} \left(\dfrac{\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{أ ج}}{\|\overrightarrow{أ ب}\| \|\overrightarrow{أ ج}\|} \right)$

$\therefore$ ق $(د أ) = $ جتا$^{-١} \left(\dfrac{٢ + ٢ + ٣}{\sqrt{١٧} \times \sqrt{٣}} \right) \approx ٦٨° \, ٢٥' \, ١١''$

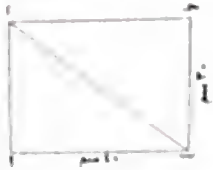
، $\because$ ق $(د ب) = $ جتا$^{-١} \left(\dfrac{\overrightarrow{ب ج} \cdot \overrightarrow{ب أ}}{\|\overrightarrow{ب ج}\| \|\overrightarrow{ب أ}\|} \right)$

$\therefore$ ق $(د ب) = $ جتا$^{-١} \left(\dfrac{٢ + ٢ + ٦}{\sqrt{٦} \times \sqrt{١٧}} \right) \approx ٥٨° \, ٢' \, ٨''$

ق $(د ج) = ١٨٠° - (٦٨° \, ٢٥' \, ١١'' + ٥٨° \, ٢' \, ٨'')$

$= ٤٤° \, ٣١' \, ١٦''$

٣٥



مركبة $\overrightarrow{س ع}$ فى اتجاه $\overrightarrow{س ح}$

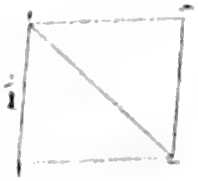
$= \|\overrightarrow{س ع}\|$ جتا $(د ع س ح)$

$= ٥٠ \times \dfrac{٣٠}{٥٠} = ٣٠$

مركبة $\overrightarrow{س ع}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ع ح}$

$= \|\overrightarrow{س ع}\|$ جتا $(د ع س ح)$ $= -٥٠ \times \dfrac{٤٠}{٥٠} = -٤٠$

٣٦



$\overrightarrow{س ع} \perp \overrightarrow{أ س}$

$\|\overrightarrow{س ع}\| = \|\overrightarrow{س أ}\|$ جتا $(د ع س أ)$

$= ١٠ \sqrt{٢} \times ١٠ \times$ جتا $٤٥°$

$= ١٠٠$

مسقط $\overrightarrow{س ع}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ح س}$

$= -\|\overrightarrow{س ع}\|$ جتا $(د ع س ح)$

$= -١٠ \sqrt{٢} \times$ جتا $٤٥° = -١٠$

٣٧

مركبة $\overrightarrow{ح ع}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ح س}$

$= \|\overrightarrow{ح ع}\|$ جتا $(د س ح ع)$

$= ٦ \times \dfrac{١}{\sqrt{٢}} = ٦ \sqrt{٢}$

مركبة $\overrightarrow{ح ع}$ فى اتجاه $\overrightarrow{أ ح}$ $= \|\overrightarrow{ح ع}\|$ جتا $د ح ع أ$

$= ٦ \sqrt{٢} \times \dfrac{-١}{\sqrt{٢}} = -٦٠$

مركبة $\overrightarrow{ح ع}$ فى اتجاه $\overrightarrow{أ ب} = -\|\overrightarrow{ح ع}\|$ جتا $٤٥°$

$= -٦ \sqrt{٢} \times \dfrac{١}{\sqrt{٢}} = -٦$

٣٨

$(\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح}) \cdot (\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح}) = \overrightarrow{و} \cdot \overrightarrow{و}$

$\therefore \|\overrightarrow{أ ب}\|^2 + \overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب ح} + \overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب ح} + \|\overrightarrow{ب ح}\|^2 = \overrightarrow{و} \cdot \overrightarrow{و}$

$\therefore \overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{ب ح} + \|\overrightarrow{ب ح}\|^2 = \overrightarrow{و} \cdot \overrightarrow{و}$

$\therefore ٢ \overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب ح} + ٢ \overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{ب ح} + ٣ = \overrightarrow{و} \cdot \overrightarrow{و}$

$\therefore \overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب ح} + \overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{ب ح} = \dfrac{\overrightarrow{و} \cdot \overrightarrow{و} - ٣}{٢}$

٣٩

$\because \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح} = ٢ \overrightarrow{ح ء}$

$\therefore (\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح}) \cdot (\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح}) = (٢ \overrightarrow{ح ء}) \cdot (٢ \overrightarrow{ح ء})$

$\therefore \|\overrightarrow{أ ب}\|^2 + \overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب ح} + \overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{أ ب} + \|\overrightarrow{ب ح}\|^2 = ٤ \|\overrightarrow{ح ء}\|^2$

$\therefore ١ + ١٦ + ٢ (\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب ح}) = ١٦$

$\therefore \overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب ح} = \dfrac{-١}{٢}$

وبالمثل $\overrightarrow{ب ح} + ٢ \overrightarrow{ح ء} = -\overrightarrow{أ ب}$

$\therefore (\overrightarrow{ب ح} + ٢ \overrightarrow{ح ء}) \cdot (\overrightarrow{ب ح} + ٢ \overrightarrow{ح ء}) = (-\overrightarrow{أ ب}) \cdot (-\overrightarrow{أ ب})$

$\therefore \|\overrightarrow{ب ح}\|^2 + ٤ \|\overrightarrow{ح ء}\|^2 + ٤ (\overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{ح ء}) = \|\overrightarrow{أ ب}\|^2$

$\therefore ١٦ + ١٦ + ٤ (\overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{ح ء}) = ١$

$\therefore \overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{ح ء} = \dfrac{-٣١}{٤}$

$\therefore$ م $= -\dfrac{١}{٢} - \dfrac{١}{٤} \cdot \dfrac{٢١}{٤} \times \dfrac{١٧}{٢}$

٤٠

$\because \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح} = \overrightarrow{و}$

$\therefore (\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح}) \cdot \overrightarrow{ب ح} = \overrightarrow{و} \cdot \overrightarrow{ب ح}$

$\therefore \overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب ح} + \|\overrightarrow{ب ح}\|^2 = \overrightarrow{ب ح} \cdot$ صفر

$\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب ح} + ٢٥ + \overrightarrow{ح ب} \cdot \overrightarrow{ب ح} = ٠$ (١)

$\because \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح} + \overrightarrow{ح ب} = \overrightarrow{و}$

$\therefore (\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح}) \cdot \overrightarrow{ح ب} = \overrightarrow{و} \cdot \overrightarrow{ح ب}$

$\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ح ب} + \overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{ح ب} + \|\overrightarrow{ح ب}\|^2 = ٠$

$\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ح ب} + \overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{ح ب} + ١٩ = ٠$ (٢)

$\because \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح} + \overrightarrow{ح ب} = \overrightarrow{و}$

$\therefore (\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح}) \cdot \overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{و} \cdot \overrightarrow{أ ب}$

$\|\overrightarrow{أ ب}\|^2 + \overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ح ب} \cdot \overrightarrow{أ ب} = ٠$

$٩ + \overrightarrow{ب ح} \cdot \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ح ب} \cdot \overrightarrow{أ ب} = ٠$ (٣)

بجمع (١) ، (٢) وبقسمة الناتج على (٢)

$\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب ح} + \overrightarrow{ح ب} \cdot \overrightarrow{ب ح} = -٢٥ - ١٩ = -٤٤$

٧

$$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & -١ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= (-٤ - ٠)\vec{س} - (٠ - ٣)\vec{ص} + (٤ + ٣)\vec{ع}$$

$$= -٤\vec{س} + ٣\vec{ص} + ٧\vec{ع}$$

$$\therefore \|٢\vec{ب} \times \vec{أ}\| = ٢ \times \|\vec{ب} \times \vec{أ}\|$$

$$= ٢ \times ٣\sqrt{٢} = ٦\sqrt{٢}$$

٦

$$\vec{ب} \times \vec{أ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ٠ & -٢ \\ ٤ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= (٠ + ٦)\vec{س} - (١ + ٨)\vec{ص} + (٣ - ٠)\vec{ع}$$

$$= ٦\vec{س} - ٩\vec{ص} + ٣\vec{ع}$$

٥

① $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ١ & -٢ \\ ٣ & -٢ & ٥ \end{vmatrix}$

$$= (٥ - ٤)\vec{س} - (٥ + ٦)\vec{ص} + (-٢ - ٣)\vec{ع}$$

$$= \vec{س} - ١١\vec{ص} - ٥\vec{ع}$$

② $٢\vec{أ} \times ٣\vec{ب} = ٦(\vec{أ} \times \vec{ب})$

$$= ٦(\vec{س} - ١١\vec{ص} - ٥\vec{ع})$$

$$= ٦\vec{س} - ٦٦\vec{ص} - ٣٠\vec{ع}$$

③ $\vec{أ} \times (\vec{أ} - ٢\vec{ب}) = \vec{أ} \times \vec{أ} - ٢\vec{أ} \times \vec{ب}$

$$= \vec{و} - ٢(\vec{س} - ١١\vec{ص} - ٥\vec{ع})$$

$$= -٢\vec{س} + ٢٢\vec{ص} + ١٠\vec{ع}$$

٤

① $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ١ & -٢ & ٣ \end{vmatrix}$

$$= (٩ - ٠)\vec{س} - (٦ - ٠)\vec{ص} + (-٤ - ٣)\vec{ع}$$

$$= ٩\vec{س} - ٦\vec{ص} - ٧\vec{ع}$$

② $\vec{أ} \times \vec{ب} = -(\vec{ب} \times \vec{أ})$

$$= -(٩\vec{س} - ٦\vec{ص} - ٧\vec{ع})$$

$$= -٩\vec{س} + ٦\vec{ص} + ٧\vec{ع}$$

③ $(\vec{أ} + \vec{ب}) \times \vec{أ} = \vec{أ} \times \vec{أ} + \vec{ب} \times \vec{أ}$

$$= \vec{و} - (٩\vec{س} - ٦\vec{ص} - ٧\vec{ع})$$

$$= -٩\vec{س} + ٦\vec{ص} + ٧\vec{ع}$$

٣

① $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٢ & -٥ \end{vmatrix}$

$$= (-١٥ - ٠)\vec{س} - (-١٠ - ٠)\vec{ص} + (٤ - ٠)\vec{ع}$$

$$= -١٥\vec{س} + ١٠\vec{ص} + ٤\vec{ع}$$

② $\vec{ب} \times \vec{أ} = -(\vec{أ} \times \vec{ب})$

$$= -(-١٥\vec{س} + ١٠\vec{ص} + ٤\vec{ع})$$

$$= ١٥\vec{س} - ١٠\vec{ص} - ٤\vec{ع}$$

③ $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٢ & -٥ \end{vmatrix}$

$$= (-١٥ - ٠)\vec{س} - (-١٠ - ٠)\vec{ص} + (٤ - ٠)\vec{ع}$$

$$= -١٥\vec{س} + ١٠\vec{ص} + ٤\vec{ع}$$

٢

① $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٣ & -٤ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٥ \end{vmatrix}$

$$= (-٢٠ - ٠)\vec{س} - (١٥ - ٠)\vec{ص} + (٦ - ٠)\vec{ع}$$

$$= -٢٠\vec{س} - ١٥\vec{ص} + ٦\vec{ع}$$

② $\vec{ب} \times \vec{أ} = -(\vec{أ} \times \vec{ب})$

$$= -(-٢٠\vec{س} - ١٥\vec{ص} + ٦\vec{ع})$$

$$= ٢٠\vec{س} + ١٥\vec{ص} - ٦\vec{ع}$$

③ $\vec{أ} \times (\vec{ب} + \vec{ع}) = \vec{أ} \times \vec{ب} + \vec{أ} \times \vec{ع}$

$$= (-٢٠\vec{س} - ١٥\vec{ص} + ٦\vec{ع}) + (-٤\vec{س} + ٣\vec{ص} + ٥\vec{ع})$$

$$= -٢٤\vec{س} - ١٢\vec{ص} + ١١\vec{ع}$$

١

① $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ٠ & -٢ & ٥ \end{vmatrix}$

$$= (١٥ - ٠)\vec{س} - (١٠ - ٠)\vec{ص} + (-٤ - ٠)\vec{ع}$$

$$= ١٥\vec{س} - ١٠\vec{ص} - ٤\vec{ع}$$

② $\vec{ب} \times \vec{أ} = -(\vec{أ} \times \vec{ب})$

$$= -(١٥\vec{س} - ١٠\vec{ص} - ٤\vec{ع})$$

$$= -١٥\vec{س} + ١٠\vec{ص} + ٤\vec{ع}$$

③ $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ٠ & -٢ & ٥ \end{vmatrix}$

$$= (١٥ - ٠)\vec{س} - (١٠ - ٠)\vec{ص} + (-٤ - ٠)\vec{ع}$$

$$= ١٥\vec{س} - ١٠\vec{ص} - ٤\vec{ع}$$

٨

① $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ -١ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$

$$= (٣ - ٠)\vec{س} - (٢ - ٠)\vec{ص} + (٦ + ٣)\vec{ع}$$

$$= ٣\vec{س} - ٢\vec{ص} + ٩\vec{ع}$$

② $\vec{ح} \times \vec{ح} = \vec{و}$

③ $(\vec{أ} - \vec{ب}) \times (\vec{ح} - \vec{أ})$

$$= (٣ ، ٠ ، -١) \times (-١ ، -١ ، ٥)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٣ & ٠ & -١ \\ -١ & -١ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= (٠ - ١)\vec{س} - (١٥ - ١)\vec{ص} + (-٣ - ٠)\vec{ع}$$

$$= -\vec{س} - ١٤\vec{ص} - ٣\vec{ع}$$

٩

① (أ)	② (أ)	③ (جـ)	④ (أ)	⑤ (ب)
⑥ (ب)	⑦ (ب)	⑧ (جـ)	⑨ (د)	⑩ (ب)
⑪ (ب)	⑫ (د)	⑬ (د)	⑭ (ب)	⑮ (جـ)
⑯ (جـ)	⑰ (جـ)	⑱ (جـ)	⑲ (جـ)	⑳ (د)

١٠

أولًا نوجد : $(١ ، -٢ ، ٣) \times (٢ ، ١ ، -٣)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & -٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{vmatrix}$$

$$= \vec{س} + ٢\vec{ص} + \vec{ع}$$

$$= (-٤ + ٥)\vec{س} - (٣ - ٥)\vec{ص} + (-٣ + ٤)\vec{ع}$$

$$\|\vec{أ}\| = ٥\sqrt{٢} \qquad \|\vec{ب}\| = ٣\sqrt{٢}$$

$$\therefore \|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = ٦\sqrt{٢}$$

$$\therefore \text{ما}\theta = \frac{\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|} = \frac{٦\sqrt{٢}}{٥\sqrt{٢} \times ٣\sqrt{٢}} = \frac{١}{٥}$$

١٣

① $\vec{أب} \times \vec{أحـ}$

$= \|\vec{أب}\| \, \|\vec{أحـ}\| \, \text{ما}(د ب أ حـ) \, (-\vec{ى})$

$= (-٣ \times ٥ \times \frac{١}{٥})\vec{ى} = -١٢\vec{ى}$

② $\vec{أد} \times \vec{حـ ب} = \|\vec{أد}\| \, \|\vec{حـ ب}\| \, \text{ما}(د ب أ حـ) \, \vec{ى} = \vec{و}$

③ $\vec{أب} \times \vec{ب ء} = -\vec{ب أ} \times \vec{ب ء}$

$= -\|\vec{ب أ}\| \, \|\vec{ب ء}\| \, \text{ما}(د ب أ ء) \, \vec{ى}$

$= -(-٣ \times ٥ \times \frac{١}{٥})\vec{ى} = -١٢\vec{ى}$

④ $\vec{حـ م} \times \vec{حـ ب}$

$= \|\vec{حـ م}\| \, \|\vec{حـ ب}\| \, \text{ما}(د ب حـ م) \, (-\vec{ى})$

$= (-\frac{٥}{٢} \times ٤ \times \frac{٢}{٥})\vec{ى} = -٦\vec{ى}$

⑤ $\vec{أب} \times \vec{حـ ب} = \|\vec{أب}\| \, \|\vec{حـ ب}\| \, \text{ما}\, ٩٠° \, \vec{ى}$

$= (٣ \times ٤ \times ١)\vec{ى} = ١٢\vec{ى}$

⑥ $\vec{ء م} \times \vec{ء حـ} = \|\vec{ء م}\| \, \|\vec{ء حـ}\| \, \text{ما}(د م ء حـ) \, (-\vec{ى})$

$= (-\frac{٥}{٢} \times ٢ \times \frac{١}{٥})\vec{ى} = -٦\vec{ى}$

١٤

① $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٤ & -٦ & ٢ \\ -٢ & ٤ & -٦ \end{vmatrix}$

$= (٣٦ - ٨)\vec{س} - (-٢٤ + ٤)\vec{ص} + (١٦ - ١٢)\vec{ع}$

$= ٢٨\vec{س} + ٢٠\vec{ص} + ٤\vec{ع}$

$\therefore \|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = ٢٠\sqrt{٣}$

$\therefore \vec{ى} = \frac{\vec{أ} \times \vec{ب}}{\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|}$

$= (\frac{٧}{١٠\sqrt{٣}}\vec{س} + \frac{٢}{٥\sqrt{٣}}\vec{ص} + \frac{٢}{١٠\sqrt{٣}}\vec{ع})$

١٦

$$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٤ & ٢ & -١ \end{vmatrix}$$

$= -٩\vec{س} + ٢\vec{ص} - ١٠\vec{ع}$

∴ مساحة متوازي الأضلاع $= |\vec{أ} \times \vec{ب}| = ٢\sqrt{٢}$ وحدة مساحة

١٣

$$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & -٤ \end{vmatrix}$$

$= -٨\vec{س} + ١٢\vec{ص} + ٦\vec{ع}$

∴ مساحة متوازي الأضلاع $= |\vec{أ} \times \vec{ب}| = ٢\sqrt{٦١}$ وحدة مساحة.

١٤

$$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ١ & -٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$= -٢\vec{س} - ١٤\vec{ص} - ١٠\vec{ع}$

∴ مساحة $\Delta = \frac{١}{٢}|\vec{أ} \times \vec{ب}| = \sqrt{٢٣}$ وحدة مساحة.

١٥

$$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ٢ & -٤ \\ ١ & -٢ & ١ \end{vmatrix}$$

$= ١٨\vec{س} + \vec{ص} + ٥\vec{ع}$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢}|\vec{أ} \times \vec{ب}| = \frac{١}{٢}\sqrt{٣٤٢} = \frac{٩}{٢}\sqrt{٣٨}$ وحدة مساحة

١٦

① $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = (٣ ، ٢ ، ٠) \cdot (-١ ، ٠ ، ٣) = -٣ + ٠ + ٠ = ٠$

∴ المتجهان غير متعامدين

② ∵ $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ عندما $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = ٠$

∴ $٣ - ٢م + ٠ = ٠$ ∴ $م = \frac{٣}{٢}$

١٧

① $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = (-٢ ، ١ ، ٠) \cdot (٨ ، -٤ ، ٨) \neq$ صفر

∴ المتجهان غير متعامدين.

∵ $\frac{-٢}{٨} = \frac{١}{-٤} = \frac{٠}{٨}$

∴ المتجهان متوازيان.

١٧

$\vec{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (٢ ، -١٤ ، ٢)$

$\vec{أحـ} = \vec{حـ} - \vec{أ} = (-٢ ، ١٤ ، -٢)$

∵ $\frac{٢}{-٢} = \frac{-١٤}{١٤} = \frac{٢}{-٢} = -١$

∴ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

طريقة أخرى:

$\vec{أب} \times \vec{أحـ} = \vec{و}$ ∴ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

١٨

∵ $\vec{أ} // \vec{ب}$ ∴ $\frac{\text{أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أص}}{\text{ب ص}} = \frac{\text{أع}}{\text{ب ع}}$

$\frac{١}{ك} = \frac{٢}{٤} = \frac{٢}{م}$ ∴ $ك = \frac{١}{٢}$ ، $م = ١$

∴ $\vec{حـ} = (\frac{١}{٢} ، ١ ، \frac{٣}{٢})$

∴ $|\vec{أحـ}| = \sqrt{(\frac{١}{٢})^٢ + (١)^٢ + (\frac{٣}{٢})^٢} = \frac{\sqrt{١١}}{٢}$

١٩

① $\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ & م \end{vmatrix}$

$= (٤ - ٣م)\vec{ع} = -٥\vec{ع}$

∴ $٤ - ٣م = -٥$ ∴ $م = ٣$

② $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ عندما $\vec{أ} \cdot \vec{ب} =$ صفر

∴ $(٢ ، ٣ ، ٠) \cdot (م ، ٢ ، ٠) = ٠$

∴ $٢م + ٦ = ٠$ ∴ $م = -٣$

③ $|\vec{أ} \times \vec{ب}| = |\vec{أ} - \vec{ب}|$

$|(١ ، -٣ ، ٠)| = -٣٢ + ٦٠$

$\sqrt{١٠} = ٢٨$

$\sqrt{١٠} = ٢٨$

∴ $|\vec{أ} \times \vec{ب}| = \sqrt{٤٩٦} = ٤\sqrt{٣١}$ وحدة مساحة

∴ مساحة القاعدة $= ٧\sqrt{٥}$

∴ ارتفاع متوازي السطوح $= \frac{\text{الحجم}}{\text{مساحة القاعدة}}$

$= \frac{١٩}{٧\sqrt{٥}}$ وحدة طول

٤٢

$$\therefore \begin{vmatrix} ١٢ & ل & ٠ \\ ١٠ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ١ & ١٥- \end{vmatrix} = ٥٢٨ \Leftrightarrow ٦ل$$

∴ حجم متوازي السطوح $= |٥٢٨ - ٦ل| = ٥٤٦$

∴ $|٦ل - ٥٢٨| = ٥٤٦$

∴ إما $٦ل - ٥٢٨ = ٥٤٦$ ومنها $ل = ١٧٩$

أو $٦ل - ٥٢٨ = -٥٤٦$ ومنها $ل = ٣٠$

٤٣

$\vec{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (-١ ، ٠ ، ٢)$

$\vec{أحـ} = \vec{حـ} - \vec{أ} = (٠ ، ٢ ، ٠)$

$\vec{دأ} = \vec{أ} - \vec{د} = (٢ ، ٠ ، ٣)$

∴ $\vec{أب} \cdot \vec{أحـ} \times \vec{دأ} = \begin{vmatrix} -١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = -١٠$

∴ حجم متوازي السطوح $= |-١٠| = ١٠$ وحدة حجم

٤٤

$\vec{أب} \times \vec{أحـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٣ & ٤ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٠ \end{vmatrix} = -٢\vec{س} + ٣\vec{ص} - ٦\vec{ع}$

∴ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{أحـ} = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = -٦٠$

∴ حجم متوازي السطوح $= |-٦٠| = ٦٠$ وحدة حجم

٤٥

$\vec{أب} \times \vec{أحـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ -٣ & ٧ & ٥ \\ -٣ & ٧ & ٥ \\ ٧ & ٥ & -٣ \end{vmatrix} = -٢٦٦\vec{ع}$

∴ حجم متوازي السطوح $= |-٢٦٦| = ٢٦٦$ وحدة حجم

٤١

① ∵ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ١ \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ١ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = ١٩$

∴ حجم متوازي السطوح $= ١٩$ وحدة حجم

٤٢

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ}$ متجهات غير صفرية

$= -٢\vec{س} + ٤\vec{ص} + ٦\vec{ع}$

$\vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ -١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = -٦\vec{س} - \vec{ص} - ٢\vec{ع}$

$(\vec{أ} \times \vec{ب}) \times (\vec{ب} \times \vec{حـ}) = (-٢ ، ٤ ، ٦) \times (-٦ ، -١ ، -٢)$

$= \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ -٢ & ٤ & ٦ \\ -٦ & -١ & -٢ \end{vmatrix} = ٦\vec{س} - ٢٠\vec{ص} + ٢٢\vec{ع}$

∴ $(\vec{أ} \times \vec{ب}) \cdot [(\vec{أ} \times \vec{ب}) \times (\vec{ب} \times \vec{حـ})]$

$= (-١ ، ٠ ، ١) \cdot (-٦ ، -٢٠ ، ٢٢) = ٦$

٣٨

∵ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = -٦٠$

∴ حجم متوازي السطوح $= |-٦٠| = ٦٠$ وحدة حجم

٣٩

∵ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} -٣ & ٧ & ٥ \\ -٣ & ٧ & ٥ \\ ٧ & ٥ & -٣ \end{vmatrix} = -٢٦٦$

∴ حجم متوازي السطوح $= |-٢٦٦| =$

٢٦٦ وحدة حجم

٤٠

$\vec{أب} \times \vec{أحـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = -٤\vec{س} + ٤\vec{ص} + ٤\vec{ع}$

∴ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ١٨$

$\vec{حـ} \times (\vec{أ} \times \vec{ب}) = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٨ \end{vmatrix} = ٢\vec{س} - ١٥\vec{ع}$

∴ $(\vec{أ} \times \vec{ب}) \times \vec{حـ} \neq \vec{أ} \times (\vec{ب} \times \vec{حـ})$

② ∵ $(\vec{أ} \times \vec{ب}) \times \vec{حـ} = ٢\vec{س} - ١٥\vec{ع}$

$(\vec{ب} \times \vec{أ}) = (-٦ ، ٥ ، -٨)$

$\vec{حـ} \times (\vec{ب} \times \vec{أ}) = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ٦ & ٥ & ٨ \\ ٠ & ٠ & ٨ \end{vmatrix} = ٢\vec{س} - ١٥\vec{ع}$

∴ $(\vec{أ} \times \vec{ب}) \times \vec{حـ} = \vec{حـ} \times (\vec{ب} \times \vec{أ})$

③ ∵ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ١٨$

$\vec{ب} \cdot \vec{حـ} \times \vec{أ} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ١٨$

∴ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \vec{ب} \cdot \vec{حـ} \times \vec{أ}$

٣٥

$$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٤ & ٢ & -١ \end{vmatrix}$$

$= -٩\vec{س} + ٢\vec{ص} - ١٠\vec{ع}$

∴ مساحة متوازي الأضلاع $= |\vec{أ} \times \vec{ب}| = ٢\sqrt{٢}$ وحدة مساحة

٣٦

$$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & -٤ \end{vmatrix}$$

$= -٨\vec{س} + ١٢\vec{ص} + ٦\vec{ع}$

∴ مساحة متوازي الأضلاع $= |\vec{أ} \times \vec{ب}| = ٢\sqrt{٦١}$ وحدة مساحة.

٣٧

$\vec{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (٢ ، ٠ ، ٢) - (٠ ، ٢ ، ٣) = (٢ ، -٢ ، -١)$

$\vec{أحـ} = \vec{حـ} - \vec{أ} = (٣ ، ٢ ، ٣)$

$\vec{أد} = \vec{د} - \vec{أ} = (٠ ، ٢ ، ٠) - (٠ ، ٢ ، ٣) = (٠ ، ٠ ، -٣)$

∴ $\vec{أب} \cdot \vec{أحـ} \times \vec{أد} = \begin{vmatrix} ٢ & -٢ & -١ \\ ٣ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٠ & -٣ \end{vmatrix} = -٢٤$

∴ حجم متوازي السطوح $= |-٢٤| = ٢٤$ وحدة حجم

٣٣

$\vec{أب} \times \vec{أحـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = \vec{س} - \vec{ص} + \vec{ع}$

∴ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١$

∴ حجم متوازي السطوح $= |١| = ١$ وحدة حجم

٣٤

$\vec{أب} \times \vec{أحـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = \vec{س} - \vec{ص} + \vec{ع}$

∴ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١$

∴ حجم متوازي السطوح $= |١| = ١$ وحدة حجم

٣٥

① $\vec{ب} \cdot \vec{حـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$

$\vec{أ} \cdot (\vec{ب} \times \vec{حـ}) = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$

$= -٢\vec{س} + ٤\vec{ص} + ٦\vec{ع}$

$\vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = -٤\vec{س} - \vec{ص} + ٢\vec{ع}$

$\vec{أ} \times (\vec{ب} \times \vec{حـ}) = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٨ \end{vmatrix}$

$= ٢\vec{س} - ١٥\vec{ع}$

∴ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} \neq \vec{أ} \times (\vec{ب} \times \vec{حـ})$

② ∵ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ١٨$

$\vec{ب} \cdot \vec{حـ} \times \vec{أ} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ١٨$

∴ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \vec{ب} \cdot \vec{حـ} \times \vec{أ}$

٣٦

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \frac{١}{٢} \times ٢ + ٢ \times \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٣} \neq$ صفر

∴ $\vec{أ}$ ليس $\perp \vec{ب}$

$\vec{ب} \cdot \vec{حـ} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢٠}{٨١} \neq$ صفر

∴ $\vec{ب}$ ليس $\perp \vec{حـ}$

$\vec{حـ} \cdot \vec{أ} = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{١٠}{٨١} \neq$ صفر

∴ $\vec{حـ}$ ليس $\perp \vec{أ}$

∵ $|\vec{أ}| = |\vec{ب}| = |\vec{حـ}| = ١$

∴ $\vec{أ} ، \vec{ب} ، \vec{حـ}$ متجهات وحدة متعامدة مثنى مثنى

٣٧

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ \frac{٢}{٣} & \frac{٢}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٢}{٣} & \frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} \end{vmatrix}$

$= (\frac{٤}{٩} + \frac{١٠}{٩})\vec{س} - (\frac{٤}{٩} - \frac{١٠}{٩})\vec{ص}$

$+ (\frac{٢}{٩} - \frac{٢٠}{٩})\vec{ع}$

$= \frac{١٤}{٩}\vec{س} + \frac{٦}{٩}\vec{ص} - \frac{١٨}{٩}\vec{ع}$

٣٨

$\vec{أ} \times \vec{حـ} = (١ ، -٢ ، ١) \times (-١ ، ١ ، ١)$

$= (-٣ ، -٢ ، -١)$

$\vec{ب} \times \vec{حـ} = (٢ ، ٠ ، ٢) \times (-١ ، ١ ، ١)$

$= (-٢ ، -٤ ، ٢)$

$\vec{أ} \times \vec{ب} = (١ ، -٢ ، ١) \times (٢ ، ٠ ، ٢)$

$= (-٤ ، ٠ ، ٤)$

$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} ١ & -٢ & ١ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ -١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ٨$

$\vec{ب} \cdot \vec{حـ} \times \vec{أ} = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٢ \\ -١ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ \end{vmatrix} = ٨$

$\vec{حـ} \cdot \vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} -١ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٢ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٨$

∴ $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \vec{ب} \cdot \vec{حـ} \times \vec{أ} = \vec{حـ} \cdot \vec{أ} \times \vec{ب}$

$$\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب حـ} \times \overrightarrow{حـ ء} = \begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ -٢ & ٣ & -٤ \\ ١ & -٣ & ٥ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

∴ $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{ب حـ}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ تقع فى نفس المستوى.

٤٥

$\overrightarrow{أ ب} = (-٢ ، -٤ ، -٦)$

$\overrightarrow{أ حـ} = (-١ ، -٣ ، -٨)$

$\overrightarrow{أ ء} = (١ ، ٠ ، -٧)$

$$\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{أ حـ} \times \overrightarrow{أ ء} = \begin{vmatrix} -٢ & -٤ & -٦ \\ -١ & -٣ & -٨ \\ ١ & ٠ & -٧ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

∴ أ ، ب ، حـ ، ء تقع فى مستوى واحد.

٤٦

إذا كان : $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{ب حـ}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ فى مستوى واحد

فإن : $\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب حـ} \times \overrightarrow{حـ ء}$ = صفر

$$\begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ل & -٣ \end{vmatrix} = ٠$$

$(-٣ - ٢ ل) - (-١)(-٩ - ٢) + ١ (٣ ل - ١) = ٠$

$-٣ - ٢ ل - ١١ + ٣ ل - ١ = ٠$

$ل - ١٥ = ٠$ ∴ ل = ١٥

٤٧

$\overrightarrow{أ ب} = (-١ ، ٥ ، -٣)$ $\overrightarrow{أ حـ} = (-٤ ، ٣ ، ٣)$

$\overrightarrow{أ ء} = (١ ، ٧ ، ك + ١)$

إذا كان أ ، ب ، حـ ، ء فى مستوى واحد

∴ $\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{أ حـ} \times \overrightarrow{أ ء}$ = صفر

$$\begin{vmatrix} -١ & ٥ & -٣ \\ -٤ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٧ & ك + ١ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ $(-١)(٣(ك + ١) - ٢١) - ٥((-٤)(ك + ١) - ٣)$

$+ (-٣)(-٢٨ - ٣) = ٠$

∴ $-٣ ك - ٣ + ٢١ + ٢٠ ك + ٢٠ + ١٥ + ٩٣ = ٠$

∴ $١٧ ك + ١٤٦ = ٠$ ∴ $ك = \frac{-١٤٦}{١٧}$

٤٨

① $|\overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ}|^٢ + |\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب حـ}|^٢$

$= |\overrightarrow{أ ب}|^٢ |\overrightarrow{ب حـ}|^٢ \text{ ما}^٢\theta + |\overrightarrow{أ ب}|^٢ |\overrightarrow{ب حـ}|^٢ \text{ مثا}^٢\theta$

$= |\overrightarrow{أ ب}|^٢ |\overrightarrow{ب حـ}|^٢ (\text{ما}^٢\theta + \text{مثا}^٢\theta)$

$= |\overrightarrow{أ ب}|^٢ |\overrightarrow{ب حـ}|^٢$

② إذا كان : $\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب حـ}$ = صفر فإن : $\overrightarrow{أ ب} \perp \overrightarrow{ب حـ}$

أو أحدهما = $\vec{و}$

إذا كان : $\overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ} = \vec{و}$ فإن : $\overrightarrow{أ ب} // \overrightarrow{ب حـ}$

أو أحدهما = $\vec{و}$

∵ لا يمكن أن يكون $\overrightarrow{أ ب} \perp \overrightarrow{ب حـ}$ ، $\overrightarrow{أ ب} // \overrightarrow{ب حـ}$

فى نفس الوقت.

∴ $\overrightarrow{أ ب} = \vec{و}$ أو $\overrightarrow{ب حـ} = \vec{و}$

٤٩

الطرف الأيمن

$= \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ} + \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{حـ ء} + \overrightarrow{ب حـ} \times \overrightarrow{حـ ء} + \overrightarrow{ب حـ} \times \overrightarrow{أ ب}$

$+ \overrightarrow{حـ ء} \times \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{حـ ء} \times \overrightarrow{ب حـ}$

$= \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ} + \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{حـ ء} + \overrightarrow{ب حـ} \times \overrightarrow{حـ ء} + (-\overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ})$

$+ (-\overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{حـ ء}) + (-\overrightarrow{ب حـ} \times \overrightarrow{حـ ء}) = \vec{و}$ = الطرف الأيسر.

٥٠

الطرف الأيمن

$= (\overrightarrow{أ ب} - \overrightarrow{ب حـ}) \times (\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب حـ})$

$= \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ} - \overrightarrow{ب حـ} \times \overrightarrow{أ ب} - \overrightarrow{ب حـ} \times \overrightarrow{ب حـ}$

$= \vec{و} + \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ} + \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ} - \vec{و}$

$= ٢ \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ}$ = الطرف الأيسر.

٥١

$(\overrightarrow{أ ب} - \overrightarrow{ء ب}) \times (\overrightarrow{ب حـ} - \overrightarrow{حـ ب})$

$= \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ} - \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{حـ ب} - \overrightarrow{ء ب} \times \overrightarrow{ب حـ} + \overrightarrow{ء ب} \times \overrightarrow{حـ ب}$

$= \overrightarrow{حـ ب} \times \overrightarrow{ء ب} - \overrightarrow{ب حـ} \times \overrightarrow{ء ب} + \overrightarrow{ب حـ} \times \overrightarrow{حـ ب} - \overrightarrow{ء ب} \times \overrightarrow{حـ ب} = \vec{و}$

∴ المنجه $(\overrightarrow{أ ب} - \overrightarrow{ء ب})$ يوازى المنجه $(\overrightarrow{ب حـ} - \overrightarrow{حـ ب})$

٥٢

$$= \frac{|\overrightarrow{أ ب}|^٢ |\overrightarrow{ب حـ}|^٢ \text{ ما}^٢\theta + |\overrightarrow{أ ب}|^٢ |\overrightarrow{ب حـ}|^٢ \text{ ما}^٢\theta}{٢ |\overrightarrow{أ ب}|^٢ |\overrightarrow{ب حـ}|^٢}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{أ ب}|^٢ |\overrightarrow{ب حـ}|^٢ (\text{ما}^٢\theta + \text{ما}^٢\theta)}{٢ |\overrightarrow{أ ب}|^٢ |\overrightarrow{ب حـ}|^٢} = \frac{١}{٢}$$

٥٣

الطرف الأيسر

$= \sqrt{(\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{أ ب})(\overrightarrow{ب حـ} \cdot \overrightarrow{ب حـ}) - (\overrightarrow{أ ب} \cdot \overrightarrow{ب حـ})^٢}$

$= \sqrt{|\overrightarrow{أ ب}|^٢ |\overrightarrow{ب حـ}|^٢ - |\overrightarrow{أ ب}|^٢ |\overrightarrow{ب حـ}|^٢ \text{ جتا}^٢\theta}$

$= \sqrt{|\overrightarrow{أ ب}|^٢ |\overrightarrow{ب حـ}|^٢ (١ - \text{جتا}^٢\theta)}$

$= \sqrt{|\overrightarrow{أ ب}|^٢ |\overrightarrow{ب حـ}|^٢ \text{ ما}^٢\theta}$

$= |\overrightarrow{أ ب}| |\overrightarrow{ب حـ}| \text{ ما}\theta = |\overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ}|$ = الطرف الأيمن

٥٤

مساحة Δ أ ب حـ $= \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{أ حـ}|$

$= \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ}|$

$= \frac{١}{٢} |\overrightarrow{أ حـ} \times \overrightarrow{ب حـ}|$

∴ $\frac{١}{٢} (\text{أ ب})(\text{أ حـ}) \text{ ما}\theta = \frac{١}{٢} (\text{أ ب})(\text{ب حـ}) \text{ ما}\theta$

$= \frac{١}{٢} (\text{أ حـ})(\text{ب حـ}) \text{ ما}\theta$

وبالقسمة على $\frac{١}{٢}$ (أ ب) (أ حـ) (ب حـ)

∴ $\frac{\text{ما}\theta}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ما}\theta}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ما}\theta}{\text{أ ب}}$

∴ $\frac{\text{ما}\theta}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ما}\theta}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ما}\theta}{\text{أ ب}} = \frac{١}{\text{ك}}$

٥٥

نفرض أن

$\overline{\text{أ حـ}} \cap \overline{\text{ب ء}} = \{\text{م}\}$

∴ $|\overrightarrow{\text{أ حـ}} \times \overrightarrow{\text{ب ء}}|$

$= |\overrightarrow{\text{أ حـ}}| \cdot |\overrightarrow{\text{ب ء}}| \text{ ما}(\text{د ا م ب})$

$= (\text{أ حـ})(\text{ب ء}) \text{ ما}(\text{د ا م ب})$

= ٢ مساحة الشكل الرباعى أ ب حـ ء

∴ مساحة الشكل الرباعى $= \frac{١}{٢} |\overrightarrow{\text{أ حـ}} \times \overrightarrow{\text{ب ء}}|$

٥٦

$\overrightarrow{\text{أ ب}} \times \overrightarrow{\text{ب حـ}}$ منجه وحدة. ∴ $|\overrightarrow{\text{أ ب}} \times \overrightarrow{\text{ب حـ}}| = ١$

∴ $|\overrightarrow{\text{أ ب}}||\overrightarrow{\text{ب حـ}}| \text{ ما}\theta = ١$ ∴ ما$\theta = ١$

∴ $\theta = ٩٠°$ ∴ $\overrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overrightarrow{\text{ب حـ}}$

٥٧

$|\overrightarrow{\text{أ ب}} \times \overrightarrow{\text{ب حـ}}| = ١$ بالتربيع

$\overrightarrow{\text{أ ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ ب}} \times \overrightarrow{\text{ب حـ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ ب}} \times \overrightarrow{\text{ب حـ}} = ١$

$١ + ٢ \times ١ \times ١ \text{ ما}\theta + ١ = ١$ ∴ ما$\theta = \frac{\text{ }}{\text{ }}$

$|\overrightarrow{\text{أ ب}} - \overrightarrow{\text{ب حـ}}|^٢ = \overrightarrow{\text{أ ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ ب}} - ٢ \overrightarrow{\text{أ ب}} \cdot \overrightarrow{\text{ب حـ}} + \overrightarrow{\text{ب حـ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب حـ}}$

٥٨

إجابات تمارين 5

تدرب على صفحة الخط المستقيم في الفراغ

١

① متجه الاتجاه = $(-١ ، ٢ ، -٣) - (٠ ، ٠ ، ٠)$
$= (-١ ، ٢ ، -٣)$

② متجه الاتجاه = $\overrightarrow{حـ ٤} = (١ ، ١ ، -١)$
$- (٠ ، -٢ ، ٣) = (١ ، ٣ ، -٤)$

٢

① $أ (-١ ، ٢ ، ٣)$

∴ جيوب تمام $\overrightarrow{أ} = \frac{(٣ ، ٢ ، -١)}{\sqrt{(-١)^٢ + (٢)^٢ + (٣)^٢}}$

∴ جيوب تمام المستقيم $= \pm \left(\frac{-١}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٢}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٣}{\sqrt{١٤}}\right)$

② $ب (١ ، ١ ، ١)$

∴ جيوب تمام $\overrightarrow{ب} = \frac{(١ ، ١ ، ١)}{\sqrt{(١)^٢ + (١)^٢ + (١)^٢}}$

∴ جيوب تمام المستقيم $= \pm \left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

٣

متجه اتجاه المستقيم
$= (٦ ، -٧ ، ١) - (٢ ، -٣ ، ١) = (٤ ، -٤ ، ٠)$

∴ بسبب الاتجاه للمستقيم هى $٤ ، -٤ ، ٠$

∴ متجه وحدة فى اتجاه المستقيم المطلوب
$= \pm \frac{(٤ ، -٤ ، ٠)}{\sqrt{(٤)^٢ + (-٤)^٢ + (٠)^٢}} = \pm \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{\sqrt{٢}} ، ٠\right)$

∴ جيوب تمام الاتجاه هى $\frac{٢}{٣} ، -\frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٣}$

أو $-\frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، -\frac{١}{٣}$

٤

المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر} = (٤ ، -٢ ، ٥) + ك (١ ، -٢ ، ٢)$

∴ $س = ٤ = \frac{ص + ٢}{-٢} = \frac{ع - ٥}{٢}$

∴ $س = ٢ ، ع = ١$

، بوضع $ص = ٢$

∴ $(٢ ، ٢ ، ١)$ إحداثيات نقطة على المستقيم.

٥

متجه الاتجاه = $\overrightarrow{أ ب} = (٣ ، -٢ ، ٦) - (-١ ، ٤ ، ٢)$
$= (٤ ، -٦ ، ٤)$

، المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = (-١ ، ٤ ، ٢) + ك (٤ ، -٦ ، ٤)$

المعادلات البارامترية

$س = -١ + ٤ ك$ ، $ص = ٤ - ٦ ك$ ، $ع = ٢ + ٤ ك$

المعادلة الإحداثية

$\frac{س + ١}{٤} = \frac{ص - ٤}{-٦} = \frac{ع - ٢}{٤}$

٦

بوضع $\frac{س + ٤}{٣} = \frac{٢ ص + ٥}{٢} = \frac{٤ - ع}{٤} = ك$

∴ $س = ٣ ك - ٤$ ، $ص = ك - \frac{٥}{٢}$

، $ع = -٤ ك + ٤$

، المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = \left(-٤ ، -\frac{٥}{٢} ، ٤\right) + ك (٣ ، ١ ، -٤)$

وبوضع $س = ٢$

∴ $ص = \frac{١}{٢}$ ، $ع = -٤$

∴ $\left(٢ ، -\frac{١}{٢} ، -٤\right)$ إحداثيات نقطة تقع على المستقيم.

٧

متجه الاتجاه = $\overrightarrow{أ ب} = (٥ ، ٨ ، ٠) - (٣ ، ٢ ، ٤)$
$(٢ ، ٦ ، -٤)$

المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = (٣ ، ٢ ، ٤) + ك (٢ ، ٦ ، -٤)$

، المعادلة البارامترية

$س = ٣ + ٢ ك$ ، $ص = ٢ + ٦ ك$ ، $ع = ٤ - ٤ ك$

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ص - ٢}{٦} = \frac{ع - ٤}{-٤}$

بوضع $س = ١$

∴ $ص = ٥$ ∴ $ع = ٢$

∴ النقطة $حـ \in$ المستقيم

أى أن : $أ ، ب ، حـ$ على استقامة واحدة.

٨

① (أ)	② (جـ)	③ (أ)	④ (جـ)	⑤ (جـ)
⑥ (ب)	⑦ (د)	⑧ (ب)	⑨ (جـ)	⑩ (ب)
⑪ (أ)	⑫ (أ)	⑬ (جـ)	⑭ (ب)	⑮ (أ)
⑯ (ب)	⑰ (أ)	⑱ (جـ)	⑲ (أ)	⑳ (د)
㉑ (ب)	㉒ (د)	㉓ (ب)	㉔ (جـ)	㉕ (د)
㉖ (ب)	㉗ (جـ)	㉘ (جـ)	㉙ (ب)	㉚ (جـ)
㉛ (د)	㉜ (د)	㉝ (د)	㉞ (جـ)	㉟ (ب)
㊱ (جـ)	㊲ (ب)			

٩

① متجه اتجاه المستقيم
$= (-١ ، ٢ ، ٤) - (٣ ، ٢ ، ١) = (-٤ ، ٠ ، ٣)$

المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = (-١ ، ٢ ، ٤) + ك (-٤ ، ٠ ، ٣)$

، المعادلة البارامترية

$س = -١ - ٤ ك$ ، $ص = ٢$ ، $ع = ٤ + ٣ ك$

، المعادلة الإحداثية $\frac{س + ١}{-٤} = \frac{ع - ٤}{٣}$ ، $ص = ٢$

② متجه اتجاه المستقيم
$= (-٣ ، ١ ، ٤) - (٢ ، -١ ، ٥) = (-٥ ، ٢ ، -١)$

، المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = (-٣ ، ١ ، ٤) + ك (-٥ ، ٢ ، -١)$

، المعادلة البارامترية

$س = -٣ - ٥ ك$ ، $ص = ١ + ٢ ك$ ، $ع = ٤ - ك$

، المعادلة الإحداثية

$\frac{س + ٣}{-٥} = \frac{ص - ١}{٢} = \frac{ع - ٤}{-١}$

③ المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = ك (-٢ ، ٣ ، ١)$

، المعادلة البارامترية :

$س = -٢ ك$ ، $ص = ٣ ك$ ، $ع = ك$

، المعادلة الإحداثية : $\frac{س}{-٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع}{١}$

④ المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = (٤ ، -٢ ، ٥) + ك (٢ ، ١ ، -١)$

، المعادلة البارامترية $س = ٤ + ٢ ك$

، $ص = -٢ + ك$ ، $ع = ٥ - ك$

، المعادلة الإحداثية

$\frac{س - ٤}{٢} = \frac{ص + ٢}{١} = \frac{ع - ٥}{-١}$

⑤ المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = (٦ ، ٠ ، -٣) + ك (٢ ، -٣ ، ٠)$

، المعادلة البارامترية

$س = ٦ + ٢ ك$ ، $ص = -٣ ك$ ، $ع = -٣$

، المعادلة الإحداثية $\frac{س - ٦}{٢} = \frac{ص}{-٣} ، ع = -٣$

⑥ ∵ المستقيم يصنع زوايا متساوية مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات

∴ $ما^٢ \theta_{س} + ما^٢ \theta_{ص} + ما^٢ \theta_{ع} = ١$

∴ $ما^٢ \theta_{س} = ما^٢ \theta_{ص} = ما^٢ \theta_{ع} = \frac{١}{٣}$

∴ متجه اتجاه المستقيم $= \left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

أى أن متجه اتجاه المستقيم $= (١ ، ١ ، ١)$

∴ المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = (٣ ، ٢ ، ٥) + ك (١ ، ١ ، ١)$

، المعادلة البارامترية

$س = ٣ + ك$ ، $ص = ٢ + ك$ ، $ع = ٥ + ك$

، المعادلة الإحداثية

$س - ٣ = ص - ٢ = ع - ٥$

⑦ المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = ك (-٢ ، ٣ ، ١)$

، المعادلة البارامترية :

$س = -٢ ك$ ، $ص = ١ + ٣ ك$ ، $ع = ٤ + ك$

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{س}{-٢} = \frac{ص - ١}{٣} = \frac{ع - ٤}{١}$

(٧) متجه الاتجاه = $\overrightarrow{ب حـ}$ = (٢ ، ١ ، ٠) − (−٣ ، ٢ ، ١)
= (٥ ، −١ ، −١)

المعادلة المتجهة :

$\overrightarrow{ر}$ = (١ ، −١ ، ٠) + ك (٥ ، −١ ، −١)

، المعادلة البارامترية :

س = ١ + ٥ ك ، ص = −١ − ك ، ع = − ك

، المعادلة الإحداثية : $\frac{س - ١}{٥} = \frac{ص + ١}{-١} = \frac{ع}{-١}$

∵ $\frac{-١٤ - ١}{٥} = -٣$ ، $\frac{١ + ٢}{-١} = -٣$ ، $\frac{٣}{-١} = -٣$

∴ النقطة (−١٤ ، ٢ ، ٣) تقع على المستقيم

(٨) متجه الاتجاه = (٤ ، ٥ ، ٣)

المعادلة المتجهة :

$\overrightarrow{ر}$ = (−١ ، ٤ ، ٢) + ك (٤ ، ٥ ، ٣)

، المعادلة البارامترية :

س = −١ + ٤ ك ، ص = ٤ + ٥ ك ، ع = ٢ + ٣ ك

، المعادلة الإحداثية : $\frac{س + ١}{٤} = \frac{ص - ٤}{٥} = \frac{ع - ٢}{٣}$

(٩) متجه الاتجاه = (٤ ، −٣ ، ٢١)

∴ المعادلة المتجهة :

$\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٥ ، −٢) + ك (٤ ، −٣ ، ٢١)

، المعادلة البارامترية : س = ١ + ٤ ك

، ص = ٥ − ٣ ك ، ع = −٢ + ٢١ ك

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{س - ١}{٤} = \frac{ص - ٥}{-٣} = \frac{ع + ٢}{٢١}$

(١٠) منتصف $\overline{أب}$ = م $\left(\frac{٣ - ٥}{٢} ، \frac{٦ + ٢}{٢} ، \frac{-٧ + ٣}{٢}\right)$
= م (−١ ، ٤ ، −٢)

∴ متجه اتجاه المستقيم هو $\overrightarrow{حـ م}$

= (−١ ، ٤ ، −٣) − (٤ ، −٧ ، −٢)
= (−٥ ، ١١ ، ٠)

∴ المعادلة المتجهة :

$\overrightarrow{ر}$ = (٤ ، −٧ ، −٢) + ك (−٥ ، ١١ ، ٠)

، المعادلة البارامترية :

س = ٤ − ٥ ك ، ص = −٧ + ١١ ك ، ع = −٢

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{س - ٤}{-٥} = \frac{ص + ٧}{١١}$ ، ع = −٢

(١١) معادلة الكرة :

$س^{٢}$ + $ص^{٢}$ + $ع^{٢}$ − س + ٢ ص − ٣ ع = $\frac{١}{٢}$

مركز الكرة هو : $\left(\frac{١}{٢} ، -١ ، \frac{٣}{٢}\right)$

متجه الاتجاه = (١ ، −١ ، ١) − $\left(\frac{١}{٢} ، -١ ، \frac{٣}{٢}\right)$
= $\left(\frac{١}{٢} ، ٠ ، \frac{-١}{٢}\right)$

∴ (١ ، ٠ ، −١) أيضًا متجه اتجاه

∴ المعادلة المتجهة :

$\overrightarrow{ر}$ = (١ ، −١ ، ١) + ك (١ ، ٠ ، −١)

المعادلة البارامترية :

س = ١ + ك ، ص = −١ ، ع = ١ − ك

، المعادلة الإحداثية :

س − ١ = − ع + ١ ، ص = −١

(١٢) المعادلة البارامترية :

س = ١ + ٥ ك ، ص = ٣ + ٤ ك ، ع = ٩ + ٢ ك

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{س - ١}{٥} = \frac{ص - ٣}{٤} = \frac{ع - ٩}{٢}$

(١٣) بوضع $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ٤}{٥} = \frac{-٧ + ع}{-٢}$ = ك

∴ س = ٢ + ك ، ص = ٥ ك − ٤

، ع = −٢ ك + ٧

وهي المعادلات البارامترية للمستقيم

، المعادلة المتجهة :

$\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −٤ ، ٧) + ك (١ ، ٥ ، −٢)

(١٤) بوضع : $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{٢ ص - ١}{٥} = \frac{٣ ع + ٢}{٤}$ = ك

∴ س = ٢ ك − ٣ ، ص = $\frac{٥}{٢}$ ك + $\frac{١}{٢}$

، ع = $\frac{٤}{٣}$ ك − $\frac{٢}{٣}$

وهي المعادلات البارامترية للمستقيم

، المعادلة المتجهة :

$\overrightarrow{ر}$ = $\left(-٣ ، \frac{١}{٢} ، \frac{-٢}{٣}\right)$ + ك $\left(٢ ، \frac{٥}{٢} ، \frac{٤}{٣}\right)$

(١٥) إحداثيات أى نقطة تقع على منصف الربع الثانى من المستوى ص ع :

هى : (٠ ، أ ، أ)

نأخذ أى نقطة على المنصف وليكن : (٠ ، −١ ، ١)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (٠ ، −١ ، ١)

∴ المعادلة المتجهة :

$\overrightarrow{ر}$ = (١ ، −٢ ، ٥) + ك (٠ ، −١ ، ١)

، المعادلة البارامترية :

س = ١ ، ص = −٢ − ك ، ع = ٥ + ك

، المعادلة الإحداثية :

س = ١ ، $\frac{ص + ٢}{-١} = \frac{ع - ٥}{١}$

١٠

من هندسة الشكل :

أ = (٥ ، ٥ ، ٥)

∴ متجه اتجاه المستقيم

الذى يحمل القطر = $\overrightarrow{وأ}$ = (٥ ، ٥ ، ٥)

، المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = ك (٥ ، ٥ ، ٥)

، المعادلة البارامترية :

س = ٥ ك ، ص = ٥ ك ، ع = ٥ ك

، المعادلة الإحداثية : $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٥}$

أى أن : س = ص = ع

١١

نوجد معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$

متجه اتجاه المستقيم

$\overrightarrow{ب حـ}$ = (٧ ، −٢ ، ٥) − (١ ، ٢ ، ٣)
= (٦ ، −٤ ، ٢)

∴ معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هى

$\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٢ ، ٣) + ك (٦ ، −٤ ، ٢)

∴ نقطة المسقط ولتكن

ء = (١ + ٦ ك ، ٢ − ٤ ك ، ٣ + ٢ ك)

$\overrightarrow{أء}$ = (١ + ٦ ك ، ٢ − ٤ ك ، ٣ + ٢ ك)
− (٠ ، ٩ ، ٦)

= (١ + ٦ ك ، −٧ − ٤ ك ، −٣ + ٢ ك)

∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب حـ}$

∴ $\overrightarrow{أء}$. $\overrightarrow{ب حـ}$ = صفر

∴ (١ + ٦ ك ، −٧ − ٤ ك ، −٣ + ٢ ك) . (٦ ، −٤ ، ٢)
= صفر

∴ ٦ + ٣٦ ك + ٢٨ + ١٦ ك + (−٦) + ٤ ك = ٠

∴ ٥٦ ك = − ٢٨

∴ ك = $-\frac{١}{٢}$

∴ النقطة ء هى (−٢ ، ٤ ، ٢)

١٢

∵ $\overrightarrow{هـ}$ = (أ ، ب ، صفر)

∴ المستقيم يقع فى مستوى يوازى المستوى س ص

١٣

الصواب هو :

(١) مجموع مربعات جيوب تمام الاتجاه لأى مستقيم = ١

(٢) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالقطبين هى

$\frac{(س_{٢} - س_{١}) ، (ص_{٢} - ص_{١}) ، (ع_{٢} - ع_{١})}{\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢} + (ع_{٢} - ع_{١})^{٢}}}$

٥ بفرض أن $\frac{س - ٤}{٢} = \frac{ص + ٥}{-١} = \frac{ع - ١}{٢} = ك$

$\therefore$ س $= ٢ك + ٤$ ، ص $= -ك - ٥$ ، ع $= ٢ك + ١$

بالتعويض فى معادلة المستوى : $٢(٢ك + ٤) - (-ك - ٥) + ٢(٢ك + ١) = ٩$

$\therefore ٤ك + ٨ + ك + ٥ + ٤ك + ٢ = ٩$

$\therefore ٩ك + ١٥ = ٩ \quad \therefore ك = -\frac{٦}{٣} = -٢$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى : $(-٤ ، ٣ ، -٣)$

٦ $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، ٣ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = (١ ، ٢ ، ٣)$

$\therefore \overrightarrow{ل} = \overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٢ ، ١)$

$\therefore$ معادلة $ل$ هى : $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ٣}{-٢} = \frac{ع - ٤}{١} = ك$

$\therefore$ س $= ك + ٢$ ، ص $= -٢ك - ٣$ ، ع $= ك + ٤$

بالتعويض فى معادلة المستوى الأول : $(ك + ٢) + ٣(-٢ك - ٣) + ٢(ك + ٤) = ٥$

$\therefore ك + ٢ - ٦ك - ٩ + ٢ك + ٨ = ٥$

$\therefore -٣ك + ١ = ٥ \quad \therefore -٣ك = ٤ \quad \therefore ك = -\frac{٤}{٣}$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى : $(\frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{٨}{٣})$

٧ $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، ٣ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = (١ ، ٢ ، ٣)$

$\therefore \overrightarrow{ل} = \overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٢ ، ١)$

$\therefore$ معادلة $ل$ هى : $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ٣}{-٢} = \frac{ع - ٤}{١} = ك$

$\therefore$ س $= ك + ٢$ ، ص $= -٢ك - ٣$ ، ع $= ك + ٤$

بالتعويض فى معادلة المستوى الأول : $(ك + ٢) + ٣(-٢ك - ٣) + ٢(ك + ٤) = ٥$

$\therefore ك + ٢ - ٦ك - ٩ + ٢ك + ٨ = ٥$

$\therefore -٣ك + ١ = ٥ \quad \therefore -٣ك = ٤ \quad \therefore ك = -\frac{٤}{٣}$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى : $(\frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{٨}{٣})$

٨ $\overrightarrow{ن_١} = \overrightarrow{ن_٢}$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى : $(٢ ، ٥ ، ٢)$

$\overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = (٢ ، ٣ ، ٤) \times (١ ، ٢ ، ٣) = (١ ، -٢ ، ١)$

$\therefore$ معادلة المستوى المطلوب هى : $(س - ٢) - ٢(ص - ٥) + (ع - ٢) = ٠$

$\therefore س - ٢ - ٢ص + ١٠ + ع - ٢ = ٠$

$\therefore س - ٢ص + ع + ٦ = ٠$

٩ $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، ٣ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = (١ ، ٢ ، ٣)$

$\therefore \overrightarrow{ل} = \overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٢ ، ١)$

$\therefore$ معادلة $ل$ هى : $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ٣}{-٢} = \frac{ع - ٤}{١} = ك$

$\therefore$ س $= ك + ٢$ ، ص $= -٢ك - ٣$ ، ع $= ك + ٤$

بالتعويض فى معادلة المستوى الأول : $(ك + ٢) + ٣(-٢ك - ٣) + ٢(ك + ٤) = ٥$

$\therefore ك + ٢ - ٦ك - ٩ + ٢ك + ٨ = ٥$

$\therefore -٣ك + ١ = ٥ \quad \therefore -٣ك = ٤ \quad \therefore ك = -\frac{٤}{٣}$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى : $(\frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{٨}{٣})$

١٠ $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، ٣ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = (١ ، ٢ ، ٣)$

$\therefore \overrightarrow{ل} = \overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٢ ، ١)$

$\therefore$ معادلة $ل$ هى : $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ٣}{-٢} = \frac{ع - ٤}{١} = ك$

$\therefore$ س $= ك + ٢$ ، ص $= -٢ك - ٣$ ، ع $= ك + ٤$

بالتعويض فى معادلة المستوى الأول : $(ك + ٢) + ٣(-٢ك - ٣) + ٢(ك + ٤) = ٥$

$\therefore ك + ٢ - ٦ك - ٩ + ٢ك + ٨ = ٥$

$\therefore -٣ك + ١ = ٥ \quad \therefore -٣ك = ٤ \quad \therefore ك = -\frac{٤}{٣}$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى : $(\frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{٨}{٣})$

١١ $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، ٣ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = (١ ، ٢ ، ٣)$

$\therefore \overrightarrow{ل} = \overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٢ ، ١)$

$\therefore$ معادلة $ل$ هى : $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ٣}{-٢} = \frac{ع - ٤}{١} = ك$

$\therefore$ س $= ك + ٢$ ، ص $= -٢ك - ٣$ ، ع $= ك + ٤$

بالتعويض فى معادلة المستوى الأول : $(ك + ٢) + ٣(-٢ك - ٣) + ٢(ك + ٤) = ٥$

$\therefore ك + ٢ - ٦ك - ٩ + ٢ك + ٨ = ٥$

$\therefore -٣ك + ١ = ٥ \quad \therefore -٣ك = ٤ \quad \therefore ك = -\frac{٤}{٣}$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى : $(\frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{٨}{٣})$

١٢ $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، ٣ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = (١ ، ٢ ، ٣)$

$\therefore \overrightarrow{ل} = \overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٢ ، ١)$

$\therefore$ معادلة $ل$ هى : $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ٣}{-٢} = \frac{ع - ٤}{١} = ك$

$\therefore$ س $= ك + ٢$ ، ص $= -٢ك - ٣$ ، ع $= ك + ٤$

بالتعويض فى معادلة المستوى الأول : $(ك + ٢) + ٣(-٢ك - ٣) + ٢(ك + ٤) = ٥$

$\therefore ك + ٢ - ٦ك - ٩ + ٢ك + ٨ = ٥$

$\therefore -٣ك + ١ = ٥ \quad \therefore -٣ك = ٤ \quad \therefore ك = -\frac{٤}{٣}$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى : $(\frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{٨}{٣})$

١٣ $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، ٣ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = (١ ، ٢ ، ٣)$

$\therefore \overrightarrow{ل} = \overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٢ ، ١)$

$\therefore$ معادلة $ل$ هى : $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ٣}{-٢} = \frac{ع - ٤}{١} = ك$

$\therefore$ س $= ك + ٢$ ، ص $= -٢ك - ٣$ ، ع $= ك + ٤$

بالتعويض فى معادلة المستوى الأول : $(ك + ٢) + ٣(-٢ك - ٣) + ٢(ك + ٤) = ٥$

$\therefore ك + ٢ - ٦ك - ٩ + ٢ك + ٨ = ٥$

$\therefore -٣ك + ١ = ٥ \quad \therefore -٣ك = ٤ \quad \therefore ك = -\frac{٤}{٣}$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى : $(\frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{٨}{٣})$

١٤ $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، ٣ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = (١ ، ٢ ، ٣)$

$\therefore \overrightarrow{ل} = \overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٢ ، ١)$

$\therefore$ معادلة $ل$ هى : $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ٣}{-٢} = \frac{ع - ٤}{١} = ك$

$\therefore$ س $= ك + ٢$ ، ص $= -٢ك - ٣$ ، ع $= ك + ٤$

بالتعويض فى معادلة المستوى الأول : $(ك + ٢) + ٣(-٢ك - ٣) + ٢(ك + ٤) = ٥$

$\therefore ك + ٢ - ٦ك - ٩ + ٢ك + ٨ = ٥$

$\therefore -٣ك + ١ = ٥ \quad \therefore -٣ك = ٤ \quad \therefore ك = -\frac{٤}{٣}$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى : $(\frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{٨}{٣})$

١٥ $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، ٣ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = (١ ، ٢ ، ٣)$

$\therefore \overrightarrow{ل} = \overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٢ ، ١)$

$\therefore$ معادلة $ل$ هى : $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ٣}{-٢} = \frac{ع - ٤}{١} = ك$

$\therefore$ س $= ك + ٢$ ، ص $= -٢ك - ٣$ ، ع $= ك + ٤$

بالتعويض فى معادلة المستوى الأول : $(ك + ٢) + ٣(-٢ك - ٣) + ٢(ك + ٤) = ٥$

$\therefore ك + ٢ - ٦ك - ٩ + ٢ك + ٨ = ٥$

$\therefore -٣ك + ١ = ٥ \quad \therefore -٣ك = ٤ \quad \therefore ك = -\frac{٤}{٣}$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى : $(\frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{٨}{٣})$

١٦ $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، ٣ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = (١ ، ٢ ، ٣)$

$\therefore \overrightarrow{ل} = \overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٢ ، ١)$

$\therefore$ معادلة $ل$ هى : $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ٣}{-٢} = \frac{ع - ٤}{١} = ك$

$\therefore$ س $= ك + ٢$ ، ص $= -٢ك - ٣$ ، ع $= ك + ٤$

بالتعويض فى معادلة المستوى الأول : $(ك + ٢) + ٣(-٢ك - ٣) + ٢(ك + ٤) = ٥$

$\therefore ك + ٢ - ٦ك - ٩ + ٢ك + ٨ = ٥$

$\therefore -٣ك + ١ = ٥ \quad \therefore -٣ك = ٤ \quad \therefore ك = -\frac{٤}{٣}$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى : $(\frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{٨}{٣})$

وعند نقطة تقاطع المستقيمين :

$2\,ل_1 + 6 = 2 + ل_2$

$\therefore 2\,ل_1 - ل_2 = -4$ (١)

$2\,ل_1 + 1 = -2\,ل_2 + 3$

$\therefore 2\,ل_1 + 2\,ل_2 = 2$ (٢)

$3\,ل_1 + 5 = 3\,ل_2 - 4$

$\therefore 3\,ل_1 - 3\,ل_2 = -9$ (٣)

من (١) ، (٢) : $ل_1 = -1$ ، $ل_2 = 2$

وبالتعويض فى معادلة (٣)

$3 \times -1 - 3 \times 2 = -9$

أى أنها تحقق معادلة (٣)

$\therefore$ س $= 4$ ، ص $= -1$ ، ع $= 2$

$\therefore$ المستقيمان متقاطعان فى النقطة $(4 ، -1 ، 2)$

٤

عند تقاطع المستقيمين : $\overleftrightarrow{ك_1} = \overleftrightarrow{ك_2}$

$\therefore (0 ، 1 ، 0) + ل_1 (1 ، 2 ، -1)$

$= (1 ، 1 ، 1) + ل_2 (-3 ، -2 ، 0)$

$\therefore ل_1 = 1 - 2\,ل_2$ $\therefore ل_1 + 2\,ل_2 = 1$ (١)

$1 + 2\,ل_2 = 1 - 2\,ل_2$

$\therefore 2\,ل_2 + 2\,ل_2 = 0$ (٢)

$\therefore ل_2 = 1$ $\therefore ل_2 = -1$ (٣)

ومن (١) ، (٢) ينتج أن :

$ل_1 = -1$ ، $ل_2 = 1$

وهذه القيم تحقق معادلة (٣)

$(س ، ص ، ع) = (0 ، 1 ، 0) + -1 (1 ، 2 ، -1)$

ومنها س $= -1$ ، ص $= -1$ ، ع $= 1$

$\therefore$ المستقيمان متقاطعان فى النقطة $(-1 ، 1 ، 1)$

٥

بوضع س $= \frac{س - 4}{-1} = \frac{ع + 1}{2} = ل_3$

$\therefore$ س $= ل_3$ ، ص $= -ل_3 + 4$ ، ع $= 2\,ل_3 - 1$

، عند تقاطع المستقيمين :

$3 + 4 = ل_3$ $\therefore 4\,ل_3 - ل_3 = -3$ (١)

$-1 + ل_3 = -ل_3 + 4$

$\therefore ل_3 + ل_3 = 5$ (٢)

، له $+ 2\,ل_3 = 2\,ل_3 - 1$

$3\,ل_3 - 2\,ل_3 = -1 - له$ (٣)

ومن (١) ، (٢) :

$ل_3 = \frac{2}{5}$ ، $ل_3 = \frac{23}{5}$

$\therefore$ المستقيمين متقاطعان

$\therefore$ قيم $ل_3$ ، $ل_3$ تحقق المعادلة (٣)

$\therefore 3 \times \frac{2}{5} - 2 \times \frac{23}{5} = -1 - له$

$\therefore له = 7$

، نقطة التقاطع هى : $\left(\frac{23}{5} ، \frac{-3}{5} ، \frac{41}{5}\right)$

٦

بوضع $\frac{س + 2}{2} = \frac{ص}{-3} = \frac{ع - 1}{4} = ل_4$

$\therefore$ س $= 2\,ل_4 - 2$ ، ص $= -3\,ل_4$ ، ع $= 4\,ل_4 + 1$

، بوضع $\frac{س - 3}{2} = \frac{ص - 1}{4} = \frac{ع - 7}{2} = ل_5$

$\therefore$ س $= 2\,ل_5 + 3$ ، ص $= 4\,ل_5 + 1$

، ع $= 2\,ل_5 + 7$

، عند تقاطع المستقيمين

$2\,ل_4 - 2 = 2\,ل_5 + 3$ $\therefore 2\,ل_4 - 2\,ل_5 = 5$ (١)

$-3\,ل_4 - 4\,ل_5 = 1$ (٢)

$4\,ل_4 + 1 = 2\,ل_5 + 7$

$\therefore$ المستقيمان متقاطعان فى النقطة $(-1 ، 1 ، 1)$

$4\,ل_4 - 2\,ل_5 = 6$ (٣)

ومن (٢) ، (٣) :

$\therefore ل_4 = 1$ ، $ل_5 = -1$

، $\because$ المستقيمين متقاطعان

$\therefore$ قيم $ل_4$ ، $ل_5$ تحقق المعادلة (١)

$\therefore 2 + 4 = ه$ $\therefore ه = 2$

٧

$\because$ ل$_1$: $\frac{س - 1}{3} = \frac{ص - 2}{4} = \frac{ع - 3}{-12}$

$\therefore$ ه $= (2 ، 4 ، -12)$

، ل$_2$: $\frac{س - 4}{3} = \frac{ص - 6}{4} = \frac{ع + 9}{-12}$

، ه $= (3 ، 4 ، -12)$

$\therefore$ ل$_1$ ، ل$_2$ لهما نفس متجه الاتجاه (١)

بوضع س $= 4$ فى معادلة ل$_2$

$\therefore$ ص $= 6$ ، ع $= -9$

$\therefore$ النقطة $(4 ، 6 ، -9) \in$ ل$_2$

ونجد أن هذه النقطة تحقق معادلة ل$_1$

$\therefore (4 ، 6 ، -9) \in$ لكل من ل$_1$ ، ل$_2$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ل$_1$ ، ل$_2$ يمثلان نفس الخط المستقيم.

٨

عند نقطة التقاطع : $\overleftrightarrow{ك_1} = \overleftrightarrow{ك_2}$

$(2 ، 3 ، 4) + ل_1 (-4 ، -4 ، 5) = (-6 ، -10 ، -1)$

$+ ل_2 (0 ، 1 ، 3)$

$\therefore 2 - 4\,ل_1 = -6$ $\therefore ل_1 = 2$ (١)

$3 - 4\,ل_1 = -10 + ل_2$

$4 + ل_2 = 13$ (٢)

$4 + 5\,ل_2 = -1 + 2\,ل_2$

$5 + ل_2 - 2\,ل_2 = -5$ (٣)

من (١) ، (٢) : $ل_1 = 2$ ، $ل_2 = 5$

$\therefore$ (س ، ص ، ع) $= (2 ، 3 ، 4) + 2 (-4 ، -4 ، 5)$

$\therefore$ نقطة التقاطع $= (-6 ، -5 ، 14)$

$\therefore$ متجه اتجاه المستقيم المطلوب $= (-6 ، -5 ، 14)$

، المعادلة المتجهة : $\overleftrightarrow{ك} = ه + ل (-6 ، -5 ، 14)$

، المعادلة البارامترية

س $= -6\,ل + 2$ ، ص $= -5\,ل + 3$ ، ع $= 14\,ل + 4$

، المعادلة الإحداثية : $\frac{س - 2}{-6} = \frac{ص - 3}{-5} = \frac{ع - 4}{14}$

٩

عند نقطة التقاطع : $\overleftrightarrow{ك_1} = \overleftrightarrow{ك_2}$

$(1 ، 2 ، 3) + ل_1 (2 ، 3 ، 2) = (3 ، 5 ، 1)$

$+ ل_2 (4 ، 5 ، 3)$

$1 + 2\,ل_1 = 3 + 4\,ل_2$

$\therefore 2\,ل_1 - 4\,ل_2 = 2$ (١)

$2 + 3\,ل_1 = 5 + 5\,ل_2$

$3\,ل_1 - 5\,ل_2 = 3$ (٢)

$3 + 3\,ل_1 = 6 + 2\,ل_2$

$3\,ل_1 - 2\,ل_2 = 3$ (٣)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $ل_1 = 1$ ، $ل_2 = 0$

$(س ، ص ، ع) = (1 ، 2 ، 3) + 1 (2 ، 3 ، 2)$

$\therefore$ نقطة التقاطع هى : $(3 ، 5 ، 5)$

$\therefore$ متجه اتجاه المستقيم المطلوب

$= (3 ، 5 ، 6) - (2 ، -1 ، 3) = (1 ، 6 ، 3)$

$\therefore$ المعادلة المتجهة للمستقيم المطلوب هى

$\overleftrightarrow{ك} = (2 ، -1 ، 3) + ك (1 ، 6 ، 3)$

المعادلة البارامترية للمستقيم المطلوب هى

س $= 2 + ك$ ، ص $= -1 + 6\,ك$ ، ع $= 3 + 3\,ك$

المعادلة الإحداثية للمستقيم المطلوب هى

$\frac{س - 2}{1} = \frac{ص + 1}{6} = \frac{ع - 3}{3}$

١٠

① لكى يكون المستقيمان متوازيين فإن :

$\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{حـ_1}{حـ_2}$

② لكى يكون المستقيمان متعامدين فإن

$أ_1 أ_2 + ب_1 ب_2 + حـ_1 حـ_2 = 0$

③ يتقاطع المستقيمان ل$_1$ ، ل$_2$ إذا وجدت $ل_1$ ، $ل_2$

تحقق كلا من المعادلات الثلاثة الآتية

س$_1$ $- حـ_1 = أ_1 ل_1 - أ_2 ل_2$

، ص$_1$ $- ص_2 = ب_1 ل_1 - ب_2 ل_2$

، ع$_1$ $- ع_2 = حـ_1 ل_1 - حـ_2 ل_2$

١١

$أ = (1 ، -2 ، 1)$ ، $ب = (-1 ، 0 ، -3)$

$حـ = (3 ، 1 ، -2)$ ، $ء = (8 ، 1 ، 4)$

① $\overleftrightarrow{أب} = (-1 ، 0 ، -3) - (1 ، -2 ، 1)$

$= (-2 ، 2 ، -4)$

$\therefore \overleftrightarrow{حء} = (-2 ، 2 ، -4)$

$\therefore \overleftrightarrow{ن} = (1 ، -2 ، 1) + ك (-2 ، 2 ، -4)$

② $\overleftrightarrow{حء} = (4 ، 1 ، 1)$

$\therefore \overleftrightarrow{ر} = (8 ، 1 ، 4) + ك (4 ، 1 ، 1)$

③ بفرض أن نقطة التقاطع هـ

، معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى :

$\overleftrightarrow{ن} = (1 ، -2 ، 1)$

$+ ك (-2 ، 2 ، -4)$

$\therefore$ هـ $= (1 - 2\,ك ، -2 + 2\,ك ، 1 - 4\,ك)$

$\overleftrightarrow{حهـ} = هـ - حـ$

$\therefore$ هـ $- حـ = (-2 ، 2 ، -4)$

$\therefore$ هـ $- أ = (-2 ، 2 ، -4)$

$\therefore$ هـ $= (-2 ، 2 ، -4) + أ$

$= (-2 ، 2 ، -4) + (1 ، -2 ، 1)$

$= (-1 ، 0 ، -3)$

١٢

نفرض أن المستقيمين متقاطعان

فى نقطة حـ

$\therefore$ حـ $\in$ المستقيم ل$_1$

$\therefore$ حـ $= (1 + 2\,ك ، -1 + 2\,ك ، 2 - ك)$

متجه اتجاه ل$_2$ (المستقيم المطلوب) $\overleftrightarrow{ف} = \overleftrightarrow{أ حـ} = حـ - أ$

$\therefore \overleftrightarrow{ف} = (2\,ك - 1 ، 2\,ك ، -ك - 1)$

$\therefore \overleftrightarrow{ف} = (2 ، 2 ، -1)$

$\because$ المستقيمين متعامدان

$\therefore \overleftrightarrow{ف} \cdot \overleftrightarrow{ف} = 0$

$(2 ، 2 ، -1) \cdot (2\,ك - 1 ، 2\,ك ، -ك - 1) = 0$

$4\,ك - 2 + 4\,ك + 1 = 0$

$9\,ك = 1$ ومنها $ك = \frac{1}{9}$

$\therefore \overleftrightarrow{ف} = \left(\frac{2}{9} ، \frac{2}{9} ، \frac{-1}{9}\right)$

$= (-7 ، 2 ، -10)$

$\therefore$ معادلة ل$_2$ هى

$\overleftrightarrow{ن} = (2 ، -1 ، 2) + ك (-7 ، 2 ، -10)$

١٣

نفرض أن المستقيمين متقاطعان

فى حـ

$\therefore$ حـ $\in$ المستقيم ل$_1$

$\therefore$ حـ $= (2 + 2\,ك ، 1 + ك ، 4 + 2\,ك)$

$\therefore$ متجه اتجاه ل$_2$ (المستقيم المطلوب)

$\overleftrightarrow{ف} = \overleftrightarrow{أ حـ} = حـ - أ$

$= (2 + 2\,ك - 3 ، 1 + ك - 2 ، 4 + 2\,ك - 5)$

$= (2\,ك - 1 ، ك - 1 ، 2\,ك - 1)$

$\therefore \overleftrightarrow{ف} = (2 ، 1 ، 2)$

$\because$ المستقيمين متعامدان

$\therefore \overleftrightarrow{ف} \cdot \overleftrightarrow{ف} = 0$

$(2 ، 1 ، 2) \cdot (2\,ك - 1 ، ك - 1 ، 2\,ك - 1) = 0$

$4\,ك - 2 + ك - 1 + 4\,ك - 2 = 0$

$9\,ك - 5 = 0$ $\therefore ك = \frac{5}{9}$

$\therefore$ حـ $= \left(\frac{19}{9} ، \frac{14}{9} ، \frac{28}{9}\right)$

$\therefore$ معادلة ل$_2$ هى

$\overleftrightarrow{ن} = \left(\frac{19}{9} ، \frac{14}{9} ، \frac{28}{9}\right) + ك (2 ، 1 ، 2)$

١٤

نفرض أن المستقيمين متقاطعان

فى نقطة حـ

$\therefore$ حـ $\in$ المستقيم ل$_1$

$\therefore$ حـ $= (2 + ك ، 1 + 2\,ك ، 2 + 2\,ك)$

متجه اتجاه ل$_2$ (المستقيم المطلوب)

$\overleftrightarrow{ف} = \overleftrightarrow{أ حـ} = (-1 + ك ، 2 + 2\,ك ، 1 + 2\,ك)$

$\because$ المستقيمين متعامدان $\therefore \overleftrightarrow{ف} \cdot \overleftrightarrow{ف} = 0$

$(1 ، 2 ، 2) \cdot (ك - 1 ، 2\,ك + 2 ، 2\,ك + 1) = 0$

$ك - 1 + 4\,ك + 4 + 4\,ك + 2 = 0$

$9\,ك + 5 = 0$ $\therefore ك = -\frac{5}{9}$

$\therefore$ حـ $= \left(\frac{13}{9} ، \frac{-1}{9} ، \frac{8}{9}\right)$

$\therefore$ معادلة ل$_2$ هى

$\overleftrightarrow{ن} = \left(\frac{13}{9} ، \frac{-1}{9} ، \frac{8}{9}\right) + ك (1 ، 2 ، 2)$

١٥

$\because$ حـ $\in$ ل$_1$ $\therefore$ حـ $= (0 ، 0 ، 0) + ل_1 (1 ، 2 ، 1)$

$\because$ حـ $\in$ ل$_2$ $\therefore$ حـ $= (5 ، 0 ، 0) + ل_2 (0 ، 1 ، 1)$

$\because$ المستقيمان متعامدان

١٧

$\overrightarrow{ق_1} = (٢ ، -١ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ق_2} = (-٢ ، ٧ ، ١١)$

$\therefore \overrightarrow{ق_1} \cdot \overrightarrow{ق_2} = (٢ ، -١ ، ١) \cdot (-٢ ، ٧ ، ١١)$

$= ٢ \times (-٢) + (-١) \times ٧ \times ١ \times ١١$

$=$ صفر

$\therefore$ المستقيمان متعامدان

عند نقطة التقاطع يكون: $\overrightarrow{س_1} = \overrightarrow{س_2}$

$\therefore (١ ، ٢ ، ٤) + ك_1 (٢ ، -١ ، ١)$

$= (١ ، ١ ، ١) + ك_2 (-٢ ، ٧ ، ١١)$

$\therefore ١ + ٢ ك_1 = ١ - ٢ ك_2$

$ك_1 + ك_2 = ٠$ (١)

$٢ - ك_1 = ١ + ٧ ك_2$

$-ك_1 - ٧ ك_2 = -١$ (٢)

$٤ + ك_1 = ١ + ١١ ك_2$

$ك_1 - ١١ ك_2 = -٣$ (٣)

ومن (١) ، (٢) ينتج أن:

$ك_1 = \frac{١}{٦}$ ، $ك_2 = -\frac{١}{٦}$

بالتعويض فى معادلة (٣):

$\frac{١}{٦} - ١١ \times -\frac{١}{٦} \neq -٣$

أى أن هذه القيم لا تحقق معادلة (٣)

$\therefore$ المستقيمان متخالفان.

١٨

$\overrightarrow{ق_1} = (-٥ ، ٧ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ق_2} = (٢ ، ١ ، ٣)$

$\therefore \overrightarrow{ق_1} \cdot \overrightarrow{ق_2} = (-٥ ، ٧ ، ١) \cdot (٢ ، ١ ، ٣)$

$= -١٠ + ٧ + ٣ = ٠$

$\therefore$ المستقيمان متعامدان

عند نقطة التقاطع يكون: $\overrightarrow{س_1} = \overrightarrow{س_2}$

$(-١ ، ٤ ، ٠) + ك_1 (-٥ ، ٧ ، ١)$

$= (٠ ، ٠ ، ٠) + ك_2 (٢ ، ١ ، ٣)$

$\therefore -١ - ٥ ك_1 = ٢ ك_2$

$٤ + ٧ ك_1 = ك_2$ (١)

$١ + ك_1 = ٣ ك_2$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن:

$ك_1 = \frac{٩}{١٩}$ ، $ك_2 = \frac{١٣}{١٩}$

بالتعويض فى معادلة (٣) ينتج أن:

$\frac{-٩}{١٩} - ٣ \times \frac{١٣}{١٩} \neq ٠$ أى أن هذه القيم

لا تحقق المعادلة (٣)

$\therefore$ المستقيمان متخالفان.

١٩

$\overrightarrow{ق_1} = (٣ ، ٤ ، ٥) - (٢ ، ٣ ، ٤) = (١ ، ١ ، ١)$

$\overrightarrow{ق_2} = (٤ ، ٠ ، -٣) - (-٢ ، -٣ ، ٦) = (٦ ، ٣ ، -٩)$

$\overrightarrow{ق_1} \cdot \overrightarrow{ق_2} = (١ ، ١ ، ١) \cdot (٦ ، ٣ ، -٩)$

$= ٦ + ٣ - ٩ = ٠$

$\therefore$ المستقيمان متعامدان

عند نقطة التقاطع يكون: $\overrightarrow{س_1} = \overrightarrow{س_2}$

$\therefore (٢ ، ٣ ، ٤) + ك_1 (١ ، ١ ، ١)$

$= (٤ ، ٠ ، -٣) + ك_2 (٦ ، ٣ ، -٩)$

$\therefore ٢ + ك_1 = ٤ + ٦ ك_2$ $\therefore ك_1 - ٦ ك_2 = ٢$ (١)

$٣ + ك_1 = ٣ ك_2$

$\therefore ك_1 - ٣ ك_2 = -٣$ (٢)

$٤ + ك_1 = -٣ - ٩ ك_2$

$\therefore ك_1 + ٩ ك_2 = -٧$ (٣)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$ك_2 = -٨$ ، $ك_1 = -\frac{٥}{٣}$

بالتعويض فى معادلة (٣)

$-٨ + ٩ \times -\frac{٥}{٣} \neq -٧$

أى أن هذه القيم لا تحقق المعادلة (٣)

$\therefore$ المستقيمان متخالفان.

تمارين على المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ

١

① (هـ) ② (أ) ③ (ب) ④ (د)

⑤ (ج) ⑥ (هـ) ⑦ (ب)

٢

$\overrightarrow{ق_1} = (٢ ، ٣ ، -٢)$

$\overrightarrow{ق_2} = \overrightarrow{أ ب}$

$= (-١ ، -٢ ، ٦)$

$\text{جا}\theta = \frac{|(٢ ، ٣ ، -٢) \times (-١ ، -٢ ، ٦)|}{\sqrt{٤ + ٩ + ٤} \sqrt{١ + ٤ + ٣٦}}$

$\therefore$ ق$(د\theta) = ٤٥°$

$أ ب = \sqrt{٦^٢ + ٢^٢ + ٦^٢} = \sqrt{٤١}$ وحدة طول

$\therefore$ طول العمود $= أ ب \text{ جا}\theta = \sqrt{٤١} \text{ جا}٤٥°$

$= ٤.١٨$ وحدة طول

٣

$\overrightarrow{ق_1} = (٢ ، ٣ ، ٠)$

$\overrightarrow{ق_2} = \overrightarrow{أ ب}$

$= (٤ ، ٢ ، ٠)$

$\text{جا}\theta = \frac{|(٢ ، ٣ ، ٠) \times (٤ ، ٢ ، ٠)|}{\sqrt{٤ + ٩ + ٠} \sqrt{١٦ + ٤ + ٠}}$

$\therefore$ ق$(د\theta) = ٨٦°$

$\therefore$ طول العمود $= أ ب \text{ جا}\theta = ٢ \text{ جا}٨٦°$

$= ١.٩٨$ وحدة طول

٤

$\overrightarrow{ق_1} = (٠ ، ٢ ، -١)$

$\overrightarrow{ق_2} = (٠ ، -١ ، ٢)$

$= (٠ ، ٣ ، -٣)$

$\overrightarrow{ق_3} = (٢ ، -٣ ، ٠)$

$\text{جا}\theta = \frac{|(٠ ، ٣ ، -٣) \times (٢ ، -٣ ، ٠)|}{\sqrt{٠ + ٩ + ٩} \sqrt{٤ + ٩ + ٠}}$

$\therefore$ ق$(د\theta) = ٤٥°$

$\therefore$ طول المسقط $= أ ب \text{ جا}\theta = \sqrt{١٧} \text{ جا}٤٥° = ٤.١$ وحدة طول.

حل آخر

$\text{طول المسقط} = \frac{|(٢ ، ٣ ، ٠) \times (٢ ، -٣ ، ٠)|}{|(٢ ، -٣ ، ٠)|}$

$= ٤.١$ وحدة طول.

٥

$\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{أ ب} = (-٣ ، ٤ ، -٢)$

$\overrightarrow{ق_2} = \overrightarrow{ب ح} = (٢ ، ٠ ، -٦)$

$\text{جا}\theta = \frac{|(-٣ ، ٤ ، -٢) \times (٢ ، ٠ ، -٦)|}{\sqrt{٩ + ١٦ + ٤} \sqrt{٤ + ٠ + ٣٦}}$

$\therefore$ ق$(د\theta) = ٨٦°$

$\therefore أ ب = \sqrt{٩ + ١٦ + ٤} = \sqrt{٢٩}$ وحدة طول

$\therefore$ البعد المشترك $= أ ب \text{ جا}\theta$

$= \sqrt{٢٩} \text{ جا}٨٦° = ٢٨$ وحدة طول

٦

$\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{أ ب}$

$= (٣ ، ١ ، -١٠)$

$\overrightarrow{ق_2} = (٦ ، ٣ ، -٤)$

$\text{جا}\theta = \frac{|(٣ ، ١ ، -١٠) \times (٦ ، ٣ ، -٤)|}{\sqrt{٩ + ١ + ١٠٠} \sqrt{٣٦ + ٩ + ١٦}}$

$\therefore$ ق$(د\theta) = ٤١°$

$أ ب = \sqrt{٩ + ١ + ١٠٠} = \sqrt{١١٠}$ وحدة طول.

$\therefore$ بعد النقطة عن المستقيم $= أ ب \text{ جا}\theta$

$= \sqrt{١١٠} \times \text{ جا}٤١° = ٧$ وحدة طول.

٧

$\frac{\text{س} - ٢}{٢} = \frac{\text{ص} + ٢}{٢} = \frac{\text{ع} + ٥}{٤}$

عند ص $= -\frac{١}{٢}$ $\therefore$ س $= ١$ ، ع $= -\frac{٥}{٤}$

$\therefore$ المستقيم يمر بالنقطة $(١ ، -\frac{١}{٢} ، -\frac{٥}{٤})$

$\overrightarrow{ق_1} = (٢ ، ٢ ، ٤)$

$\overrightarrow{ق_2} = \overrightarrow{أ ب} = (-٢ ، ٢\frac{١}{٢} ، ٤)$

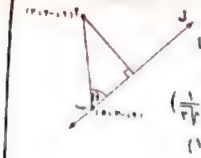
$\text{جا}\theta = \frac{|(٢ ، ٢ ، ٤) \times (-٢ ، ٢\frac{١}{٢} ، ٤)|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١٦} \sqrt{١٦ + \frac{٢٥}{٤} + ١٦}}$

$\therefore$ ق$(د\theta) = ٦١°$

$\therefore أ ب = \sqrt{٤ + ٤ + ١٦} = \frac{٩}{٢}$ وحدة طول

$\therefore$ البعد المشترك $= أ ب \text{ جا}\theta$

٨



$\therefore$ المستقيم يصنع زوايا

متساوية مع المحاور

$\therefore$ ق$_1 = (\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}})$

أى أن ق$_1 = (١ ، ١ ، ١)$

$\overrightarrow{ق_2} = \overrightarrow{أ ب} = (١ ، -١ ، ٢)$

$\text{جا}\theta = \frac{|(١ ، ١ ، ١) \times (١ ، -١ ، ٢)|}{\sqrt{١ + ١ + ١} \sqrt{١ + ١ + ٤}}$

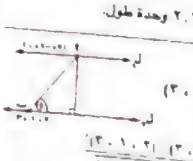
$\therefore$ ق$(د\theta) = ٥٢°$ ٦١

$أ ب = \sqrt{١ + ١ + ٤} = \sqrt{٦}$ وحدة طول.

$\therefore$ بعد النقطة عن المستقيم $= أ ب \text{ جا}\theta$

$= \sqrt{٦} \text{ جا}٥٢° ٦١ = ٢.٢$ وحدة طول.

٩



$\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{أ ب} = (٠ ، ٢ ، ٣)$

$\overrightarrow{ق_2} = (٢ ، ٠ ، ٣)$

$\text{جا}\theta = \frac{|(٠ ، ٢ ، ٣) \times (٢ ، ٠ ، ٣)|}{\sqrt{٠ + ٤ + ٩} \sqrt{٤ + ٠ + ٩}}$

$\therefore$ ق$(د\theta) = ٢٣° ٣٥$

$أ ب = \sqrt{٠ + ٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$ وحدة طول

$\therefore$ البعد بين المستقيمين $= أ ب \text{ جا}\theta$

$= \sqrt{١٣} \text{ جا}٢٣° ٣٥ = ٢.١$ وحدة طول.

١٠

النقطة أ $= (٣ ، ك ، ٢) \in$ المستقيم $(٢ ، ك ، ١) + ل (٠ ، ١ ، ٠)$

متجه اتجاه المستقيم $س ص = (٠ ، ١ ، ٠)$

$\therefore \overrightarrow{ق_1} = (١ ، ١ ، ٠)$

$\overrightarrow{ق_2} = \overrightarrow{أ ب} = (-١ ، ك - ١ ، ٢)$

$\therefore \overrightarrow{أ ب} \perp$ المستقيم

$\therefore (-١ ، ك - ١ ، ٢) \cdot (٠ ، ١ ، ٠) = ٠$

$\therefore ك - ١ = ٠$ $\therefore ك = ١$

$\therefore \overrightarrow{ق_2} = (-١ ، ٠ ، ٢)$

$\therefore$ ق$_2 = (١ ، ١ ، ٠) - (-١ ، ٠ ، ٢)$

$= (٢ ، ١ ، -٢)$

$\therefore$ ق$_2 = \sqrt{٤ + ١ + ٤} = ٣$ وحدة طول

$\therefore$ طول العمود $= أ ب \text{ جا}\theta = ٢ \text{ جا}٨٦° ٢٠$

$= ٤.٩٦$ وحدة طول.

١١

متجه اتجاه المستقيم

$س ص = س ح$

$= (٤ ، ٣ ، -٤)$

$\therefore$ معادلة المستقيم $س ص$ هى

$(٢ ، ٠ ، ٣) + ل (٤ ، ٣ ، -٤)$

متجه اتجاه المستقيم $أ ب = (٣ ، ٠ ، ٤)$

$\text{جا}\theta = \frac{|(٤ ، ٣ ، -٤) \times (٣ ، ٠ ، ٤)|}{\sqrt{١٦ + ٩ + ١٦} \sqrt{٩ + ٠ + ١٦}}$

$\therefore$ ق$(د\theta) = ٦٠°$

$أ ب = \sqrt{٩ + ٠ + ١٦} = \sqrt{٢٥}$ وحدة طول

$س ح = \sqrt{١٦ + ٩ + ١٦} = \sqrt{٤١}$ وحدة طول

$\therefore$ مساحة $\Delta أ س ح = \frac{١}{٢} \times ٥ \times \sqrt{٤١} \times \text{ جا}٦٠°$

$= \frac{٥\sqrt{٣}}{٤} \sqrt{٤١}$ وحدة مساحة

١٢

عند نقطة تقاطع المستقيمين

$س ص = س ح$

$(٤ ، -٣ ، -١٠) + ك (١ ، -٤ ، ٧)$

$= (١ ، -١ ، ١٠) + ل (٢ ، ٣ ، ٩)$

$٤ + ك = ١ + ٢ ل$ $\therefore ك - ٢ ل = -٣$ (١)

$-٣ - ٤ ك = -١ + ٣ ل$ $\therefore -٤ ك - ٣ ل = ٢$ (٢)

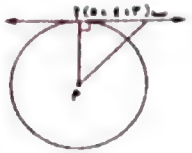
$-١٠ + ٧ ك = ١٠ + ٩ ل$ $\therefore ٧ ك - ٩ ل = ٢٠$ (٣)

من (١) ، (٢) ينتج أن $ك = -٢$ ، $ل = ١$

بالتعويض فى معادلة (٣) $-١٤ - ٩ \neq ٢٠$

$\therefore$ المستقيمان متخالفان.

١٣



مركز الكرة م = (−١ ، ٢ ، ٥)

معادلة المستقيم هى :

$\overleftrightarrow{ل}$ = (٣ ، ٤ ، ٥)

+ ك (٢ ، −٣ ، ٦)

متجه اتجاه المستقيم $\overrightarrow{ب م}$ = (−٤ ، −٢ ، ٠)

، ب م = $\sqrt{٢٠}$ وحدة طول

متجه اتجاه المستقيم ل = (٢ ، −٣ ، ٦)

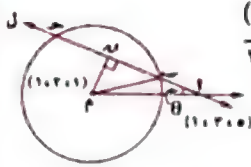
∴ جتا ب = $\frac{|(-٤ ، -٢ ، ٠) . (٢ ، -٣ ، ٦)|}{\sqrt{١٦ + ٤} \sqrt{٤ + ٩ + ٣٦}}$

ق (د ب) ≈ ٢٠ ٨٦°

∴ نق = ب م جا ب = $\sqrt{٢٠}$ جا ٢٠ ٨٦°

≈ ٤,٤٦ وحدة طول.

١٤



مركز الكرة = (١ ، ٢ ، ١)

، نق = $\sqrt{١ + ٤ + ١ + ٣٩}$

= ٣ $\sqrt{٥}$ وحدة طول

معادلة المستقيم ل :

$\overleftrightarrow{ر}$ = (٥ ، ٣ ، ١) + ك (١ ، ٣ ، −٢)

∴ متجه اتجاه المستقيم $\overrightarrow{أ م}$ = (−٤ ، −١ ، ٠)

، أ م = $\sqrt{١٧}$ وحدة طول

∴ جتا θ = $\frac{|(-٤ ، -١ ، ٠) . (١ ، ٣ ، -٢)|}{\sqrt{١٦ + ١} \sqrt{١ + ٩ + ٤}}$

ق (د θ) ≈ ٦٣° أ

∴ م ﻫ = أ م جا θ = $\sqrt{١٧}$ جا ٦٣° أ

≈ ٣,٦٧ وحدة طول

∴ ﻫ ب = $\sqrt{(\text{نق})^٢ - (\text{م ﻫ})^٢}$ = ٥,٦

∴ ب حـ = ٢ × ٥,٦ = ١١,٢ وحدة طول.

حل آخر:

بوضع $\frac{\text{س} - ٥}{١} = \frac{\text{ص} - ٢}{٣} = \frac{\text{ع} - ١}{-٢}$ = ك

∴ س = ٥ + ك ، ص = ٣ + ٣ ك ، ع = ١ − ٢ ك

وبالتعويض فى معادلة الكرة

∴ (٥ + ك)^٢ + (٣ + ٣ ك)^٢ + (١ − ٢ ك)^٢ − ٢ (٥ + ك)

− ٤ (٣ + ٣ ك) − ٢ (١ − ٢ ك) − ٣٩ = ٠

∴ ك^٢ + ك − ٢ = ٠ ∴ (ك + ٢) (ك − ١) = ٠

∴ ك = −٢ أو ك = ١

∴ نقط التقاطع هى (٥ − ٢ ، ٣ − ٦ ، ١ + ٤)

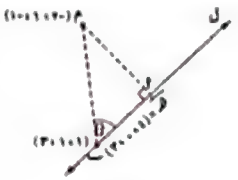
، (٣ ، −٣ ، ٥) ، (٥ + ١ ، ٣ + ٣ ، ١ − ٢)

= (٦ ، ٦ ، −١)

∴ البعد بين النقطتين = $\sqrt{(٣)^٢ + (٩)^٢ + (-٦)^٢}$

= $\sqrt{١٢٦}$ ≈ ١١,٢ وحدة طول.

١٥



بفرض م مركز الكرة

، أ نقطة التماس

∴ $\overleftrightarrow{أ ب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ل}$

$\overrightarrow{م ب}$ = (١ ، ١ ، ٣) − (−٢ ، ١ ، −١)

= (٣ ، ٠ ، ٤)

∴ جتا θ = $\frac{|(٣ ، ٠ ، ٤) . (٤ ، ٠ ، ٣)|}{\sqrt{٩ + ١٦} \sqrt{١٦ + ٩}}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

∴ θ = ٣٧° ٥٢ ١٦°

∴ أ م = م ب جا θ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ جا ٣٧° ٥٢ ١٦°

= ١,٤ وحدة طول.

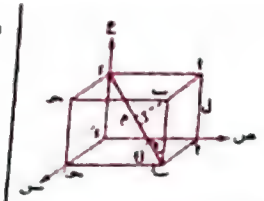
∴ طول نصف قطر الكرة = ١,٤ وحدة طول.

، مركزها (−٢ ، ١ ، −١)

∴ معادلة الكرة

(س + ٢)^٢ + (ص − ١)^٢ + (ع + ١)^٢ = $\frac{٤٩}{٢٥}$

١٦



من هندسة الشكل :

ﺟ = (ل ، ل ، ٠)

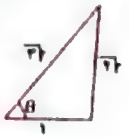
، ب = (ل ، ل ، ل)

ء = (٠ ، ٠ ، ل)

∴ متجه اتجاه $\overrightarrow{ﺟ ء}$ = (ل ، ل ، − ل)

متجه اتجاه $\overrightarrow{ب ﺟ}$ = (٠ ، ٠ ، ل)

∴ جتا θ = $\frac{|(٠ ، ٠ ، ل) . (ل ، ل ، -ل)|}{\sqrt{ل^٢ + ل^٢ + ل^٢} \sqrt{ل^٢}}$ = $\frac{ل^٢}{ل^٢ \sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$



∴ ق (د θ) ≈ ٥٤° ٤٤

∴ ب م = ل جا θ

ب م = ل × $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ ل

∴ طول العمود الساقط من الرأس على قطر غير مار به

= $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ ل

١٧

بوضع $\frac{\text{س} - ١}{٢} = \frac{\text{ص} - ٢}{٣} = \frac{\text{ع} + ١}{٤}$ = ك

∴ س = ٢ ك + ١ ، ص = ٣ ك + ٢

، ع = ٤ ك − ١

∴ أى نقطة على المستقيم تكون

(٢ ك + ١ ، ٣ ك + ٢ ، ٤ ك − ١)

وبفرض أن ل بعد أى نقطة عن محور السينات

∴ ل^٢ = (٣ ك + ٢)^٢ + (٤ ك − ١)^٢

∴ ٢ ل $\frac{\text{ء ل}}{\text{ء ك}}$ = ٢ (٣ ك + ٢) × ٣ + ٢ (٤ ك − ١) × ٤

= ١٨ ك + ١٢ + ٣٢ ك − ٨ = ٥٠ ك + ٤

وبوضع $\frac{\text{ء ل}}{\text{ء ك}}$ = ٠ ∴ ك = $\frac{-٢}{٢٥}$

، ∵ إشارة ل' تتغير من السالب إلى الموجب

∴ توجد قيمة صغرى محلية للدالة $\left(\frac{-٢}{٢٥}\right)$

عند ك = $\frac{-٢}{٢٥}$

، ل^٢ = $\left(٣ \times \frac{-٢}{٢٥} + ٢\right)^٢ + \left(٤ \times \frac{-٢}{٢٥} - ١\right)^٢ = \frac{١٢١}{٢٥}$

∴ ل = ٢,٢ وحدة طولية

∴ أقصر بعد بين المستقيم ومحور السينات

= ٢,٢ وحدة طولية

6 اجابات تمارين

١

① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (أ) ⑤ (ب)

⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (ب) ⑨ (جـ) ⑩ (أ)

⑪ (جـ) ⑫ (أ) ⑬ (ب) ⑭ (د)

٢

$\overrightarrow{ﻫ ﺟ}$. $\overrightarrow{ﻫ ر}$ = $\overrightarrow{ﻫ ﺟ}$. $\overrightarrow{أ ﻫ}$

(١ ، −٢ ، ٣) . $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، −٢ ، ٣) . (٢ ، −٣ ، ١)

∴ (١ ، −٢ ، ٣) . $\overrightarrow{ر}$ = ١١

٣

∵ $\overrightarrow{ﻫ ﺟ}$ = (١ ، ٢ ، −٣)

∴ (١ ، ٢ ، −٣) . $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٢ ، −٣) . (٠ ، ٠ ، ٠)

س + ٢ ص − ٣ ع = ٠

٤

(١ ، −١ ، ٣) . $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، −١ ، ٣) . (−٣ ، ٤ ، ٢)

(١ ، −١ ، ٣) . $\overrightarrow{ر}$ = −١ (الصورة المتجهة)

١ (س + ٣) − (ص − ٤) + ٣ (ع − ٢) = ٠

(الصورة القياسية)

س − ص + ٣ ع + ١ = ٠ (الصورة العامة)

٥

(٢ ، −٣ ، ٤) . $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −٣ ، ٤) . (١ ، −١ ، ٤)

(٢ ، −٣ ، ٤) . $\overrightarrow{ر}$ = ٢١ (الصورة المتجهة)

$\therefore \|\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ}\| = \sqrt{(18)^2 + (12)^2 + (24)^2}$

$= 6\sqrt{29}$

$\therefore$ مساحة Δ أ ب حـ $= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ}\|$

$= 3\sqrt{29}$ وحدة مربعة.

١٧

$\overrightarrow{ن} = (2، ب، حـ)$

$\therefore$ متجه اتجاه المستقيم المطلوب $= (2، ب، حـ)$

$\therefore$ معادلة المستقيم هي : $\overrightarrow{ر} = (س_1، ص_1، ع_1) + ك (2، ب، حـ)$

١٨

① $\because$ المستويان متوازيان

$\therefore \overrightarrow{ن_1} = \overrightarrow{ن_2} = (1، -2، 2)$

$\therefore$ معادلة المستوى : $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

$(1، -2، 2) \cdot (س، ص، ع) = (1، -2، 2) \cdot (1، -1، 2)$

$(1، -2، 2) \cdot (س، ص، ع) = 7$

$س - 2ص + 2ع - 7 = 0$.

② $\overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = (1، 1، -1)$

$\overrightarrow{ن_1} = (1، 1، 1)$

$\therefore \overrightarrow{ن_1} \times \overrightarrow{ن_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2\overrightarrow{س} - 2\overrightarrow{ص}$

$\therefore \overrightarrow{ن} = (2، -2، 0)$ ، $\overrightarrow{أ} = (1، 2، -3)$

$\therefore$ معادلة المستوى المطلوب $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

$(2، -2، 0) \cdot (س، ص، ع) = (2، -2، 0) \cdot (1، 2، -3)$

$(2، -2، 0) \cdot (س، ص، ع) = -2$

$(2، -2، 0) \cdot (س، ص، ع) = -2$

$2س - 2ص + 2 = 0$

$س - ص + 1 = 0$.

③ $\overrightarrow{ن} = (2، 1، -1) \times (3، 6، -2)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

$= 4\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + 9\overrightarrow{ع}$

$\therefore$ معادلة المستوى المطلوب : $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

$(4، 1، 9) \cdot (س، ص، ع) = (4، 1، 9) \cdot (1، 2، 3)$

$(4، 1، 9) \cdot (س، ص، ع) = 33$

$4س + ص + 9ع - 33 = 0$.

④ $\overrightarrow{هـ م} = (-1، -4، 2) - (2، 2، 3) = (-3، -6، -1)$

$\overrightarrow{هـ م} = (3، -1، 0)$

$\therefore \overrightarrow{ن} = \overrightarrow{هـ م} \times \overrightarrow{هـ ن}$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -1 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2\overrightarrow{س} + 6\overrightarrow{ص} + 13\overrightarrow{ع}$

$\therefore$ معادلة المستوى المطلوب : $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

$(2، 6، 13) \cdot (س، ص، ع) = (2، 6، 13) \cdot (1، -2، 5)$

$(2، 6، 13) \cdot (س، ص، ع) = 55$

$2س + 6ص + 13ع - 55 = 0$.

⑤ $\overrightarrow{ن} = (4، -1، 2) \times (1، 0، 0)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$

$\therefore$ معادلة المستوى المطلوب : $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

$(0، 1، 0) \cdot (س، ص، ع) = (0، 1، 0) \cdot (4، -1، 2)$

$(0، 1، 0) \cdot (س، ص، ع) = -1$

$2ص + ع = -1$.

خطأ شائع

$\because$ المستوى يحوى محور السينات

$\therefore$ معادلته هي ب ص + حـ ع = 0 .

$\therefore \frac{ب}{حـ} ص + ع = 0$.

$\because$ المستوى يمر بالنقطة $(4، -1، 2)$

$\therefore \frac{ب}{حـ} \times -1 + 2 = 0$. $\therefore \frac{ب}{حـ} = 2$

$\therefore$ معادلة المستوى هي : $2ص + ع = 0$.

⑥ $\because$ مسقط نقطة الأصل على المستوى هي $(2، 3، -5)$

$\therefore \overrightarrow{ن} = (2، 3، -5) - (0، 0، 0)$

$= (2، 3، -5)$

$\therefore$ معادلة المستوى المطلوب : $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

$(2، 3، -5) \cdot (س، ص، ع) = (2، 3، -5) \cdot (2، 3، -5)$

$(2، 3، -5) \cdot (س، ص، ع) = 38$

$(2، 3، -5) \cdot (س، ص، ع) = 38$

$2س + 3ص - 5ع - 38 = 0$.

⑦ $\frac{س}{2} + \frac{ص}{-3} + \frac{ع}{5} = 1$

⑧ نفرض أن طول الجزء المقطوع من محاور الإحداثيات $= أ$

$\therefore$ معادلة المستوى $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{أ} + \frac{ع}{أ} = 1$

$\because (2، 5، -7) \in$ للمستوى

$\therefore \frac{2}{أ} + \frac{5}{أ} + \frac{-7}{أ} = 1$ $\therefore أ = 1$

$\therefore$ معادلة المستوى المطلوب $س + ص + ع = 1$

⑨ نفرض أن طول الجزء المقطوع من محورى الإحداثيات س ، ص هـ ك ، الجزء المقطوع من المحور ع $= م$

$\therefore$ معادلة المستوى هي $\frac{س}{ك} + \frac{ص}{ك} + \frac{ع}{م} = 1$

$\because (2، 5، 1) \in$ للمستوى

$\therefore \frac{2}{ك} + \frac{5}{ك} + \frac{1}{م} = 1$

$\therefore \frac{8}{ك} + \frac{1}{م} = 1$ $\therefore \frac{1}{م} = 1 - \frac{8}{ك}$

$\therefore \frac{1}{م} = \frac{ك - 8}{ك}$ (١)

$\because (7، 7، 8) \in$ للمستوى

$\therefore \frac{7}{ك} + \frac{7}{ك} + \frac{8}{م} = 1$

$\therefore \frac{11}{ك} + \frac{8}{م} = 1$ $\therefore \frac{8}{م} = 1 - \frac{11}{ك}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$8 - \frac{64}{ك} = 1 - \frac{14}{ك}$ $\frac{7}{1} = \frac{ك - 64}{14}$

$\therefore ك = \frac{50}{5}$ من (١) $م = \frac{-20}{3}$

$\therefore$ معادلة المستوى هي :

$\frac{س}{2} + \frac{ص}{\frac{-20}{3}} + \frac{ع}{4} = 1$

أى أن : $\frac{7س}{10} + \frac{7ص}{50} - \frac{3ع}{20} = 1$

⑩ معادلة المستوى المطلوب هي

$\frac{س}{-2} + \frac{ص}{\frac{2}{3}} + \frac{ع}{ك} = 1$

$\therefore \left(\frac{-1}{2}، \frac{2}{3}، \frac{1}{ك}\right)$ متجه اتجاه عمودى المستوى

$\because$ المستوى المطلوب عموديًا على المستوى $2س - 2ص + 4ع - 5 = 0$.

$\therefore \left(\frac{-1}{2}، \frac{2}{3}، \frac{1}{ك}\right) \cdot (2، -2، 4) = 0$.

$\therefore -1 - 2 + \frac{4}{ك} = 0$ $\therefore ك = 1$

$\therefore$ معادلة المستوى المطلوب هي :

$\frac{س}{-2} + \frac{ص}{2} + ع = 1$ (وبالضرب × 2)

$-س + 2ص + 2ع - 2 = 0$.

⑪ معادلة المستوى المطلوب هي

$\frac{س}{-2} + \frac{ص}{ك} + \frac{ع}{2} = 1$

$\because$ المستوى يمر بـ $(6، -1، 1)$

$\therefore \frac{6}{-2} + \frac{-1}{ك} + \frac{1}{2} = 1$ $\therefore ك = -4$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هى

$\frac{س}{-2} + \frac{ص}{-4} + \frac{ع}{2} = 1$

⑫ $\because \overrightarrow{هـ ص} = (4، 1، 3)$ ، $\overrightarrow{هـ ص} = (8، 2، 1)$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

$\therefore$ المستقيمان متوازيان أو منطبقان

$\because$ النقطة أ $(1، -2، 2) \in ل_1$

وبالتعويض بها فى $ل_2$ نجد أن أ $\notin ل_2$

$\therefore$ المستقيمان متوازيان وغير منطبقين

$\therefore$ يمكن أن يجمعهما مستوى واحد

ونفرض أ $(1، -2، 2) \in ل_1$ ، ب $(2، 4، -5) \in ل_2$

$\therefore \overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (2، 6، -7)$

$\therefore$ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

$= \overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ن_1}$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ 2 & 6 & -7 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 25\overrightarrow{س} - 34\overrightarrow{ص} - 22\overrightarrow{ع}$

$\therefore$ معادلة المستوى هي $(25، -34، -22) \cdot (س، ص، ع) = (25، -34، -22) \cdot (1، -2، 2)$

$25س - 34ص - 22ع = 19$

⑬ متجه الاتجاه العمودى على المستوى

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ 6 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (-9، -19، -16)$

$\because$ المستوى يحوى المستقيم $\frac{س - 6}{1} = \frac{ص + 2}{-3} = \frac{ع}{3}$

$\therefore$ المستوى يحوى النقطة $(6، -2، 0)$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هى

$(-9، -19، -16) = (6، -2، 0) \cdot (س، ص، ع)$

$-9س - 19ص - 16ع = -54 + 38$

$9س + 19ص + 16ع = 16$

(٣)

$3ك_1 - ك_2 = 1$

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

$\therefore ك_1 = 1$ ، $ك_2 = 2$

وبالتعويض فى (٣) :

$\therefore 3(1) - (2) = 1$ (تحقق المعادلة)

$\therefore$ المستقيمان متقاطعان

$\therefore$ متجه الاتجاه العمودى على المستقيمين المتقاطعين

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (5، 2، -3)$

$\therefore$ معادلة المستوى المطلوب هى :

$(5، 2، -3) \cdot (س، ص، ع) = (5، 2، -3) \cdot (2، 1، -1)$

$5س + 2ص - 3ع - 20 = 0$.

١٩

$\because$ النقطة $(-1، 3، -2)$ تقع على المستقيم

$\therefore (-1، 3، -2) \in$ للمستوى المطلوب

$\therefore$ المتجه $(-1، 3، -2) - (0، 7، -7)$

$= (-1، -4، 5)$

يقع فى المستوى

$\therefore$ متجه الاتجاه العمودى على المستوى

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -1 & -4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-14، -14، -14)$

$\therefore$ المتجه $(1، 1، 1)$ متجه اتجاه عمودى على المستوى

$\therefore$ معادلة المستوى المطلوب هى

$\overrightarrow{ن} \cdot (1، 1، 1) = (0، 7، -7) \cdot (1، 1، 1)$

$\therefore س + ص + ع = 0$.

٢٠

$\because$ و $(0، 0، 0)$ ، أ $(5، 2، 3)$ ، ب $(5، 2، 3)$

① متجه $\overrightarrow{هـ و} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{و ب}$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 0\overrightarrow{س} + 0\overrightarrow{ص} + 0\overrightarrow{ع}$

$\therefore$ المستوى يمر بنقطة الأصل

$\therefore$ معادلة المستوى المائل هى $0س + 0ص + 0ع = 0$.

② متجه اتجاه المستقيم $\overrightarrow{و أ}$ هو $\overrightarrow{ن} = (5، 2، 3)$

$\therefore$ معادلة خط أكبر ميل هو $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} (5، 2، 3)$

٢١

يتقاطع المستقيمان عندما $\overrightarrow{ر_1} = \overrightarrow{ر_2}$

$\therefore (2، 4، -1) + ك_1 (1، 2، 0) = (0، 5، 2) + ك_2 (1، -1، 0)$

$\therefore ك_1 = ك_2 - 1$ (١)

$2ك_1 = ك_2 + 4$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

$\therefore ك_1 = 5$ ، $ك_2 = 4$

٢٢

$ل_1 : 2س = 3ص = 4ع$

$ل_2 : 2س = 2ص = 5ع$

يمران بنقطة الأصل

$\therefore$ المستقيمان متقاطعان

$\therefore$ متجه الاتجاه العمودى على مستويهما

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-7، -6، -2)$

$\therefore$ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overrightarrow{ن} \cdot (-7، -6، -2) = (0، 0، 0)$

المستوى يمر بنقطة الأصل .

∴ معادلة المستوى المطلوبة هى

$\overrightarrow{ن} \cdot (-٧ ، ٨ ، -٣) = (-١ ، ٣ ، ٢) \cdot (-٧ ، ٨ ، -٣)$

∴ $-٧ س + ٨ ص - ٣ ع - ٢٥ = ٠$

٢٨

متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = (-٢ ، -٤ ، -١٠)$

∵ المستوى يحوى نقطة الأصل

∴ معادلة المستوى المطلوب هى

$-٢ س - ٤ ص - ١٠ ع = ٠$

∴ $س + ٢ ص + ٥ ع = ٠$

٢٩

① ∵ المستوى المطلوب يوازى المستوى

$٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ١$

∴ الاتجاه العمودى للمستويين واحد

∴ $(٢ ، ٣ ، ٥)$ متجه اتجاه المستوى المطلوب

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overrightarrow{ن} \cdot (٢ ، ٣ ، ٥) = (٢ ، ١ ، ٤) \cdot (٢ ، ٣ ، ٥)$

∴ $٢ س + ٣ ص + ٥ ع - ٢٧ = ٠$

② ∵ المستوى عمودى على المستقيم المار بالنقطتين $(٣ ، ٢ ، ٥)$ ، $(١ ، ٦ ، ٤)$

∴ المتجه $(٣ ، ٢ ، ٥) - (١ ، ٦ ، ٤) = (٢ ، -٤ ، ١)$ متجه اتجاه عمودى للمستوى

∴ معادلة المستوى المطلوب هى

$\overrightarrow{ن} \cdot (٢ ، -٤ ، ١) = (٢ ، ١ ، ٤) \cdot (٢ ، -٤ ، ١)$

∴ $٢ س - ٤ ص + ع - ٤ = ٠$

③ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٧ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ & -٦ \end{vmatrix} = (-١٦ ، ٤٨ ، ٣٢)$

∴ المتجه $(-١ ، ٣ ، ٢)$ متجه عمودى للمستوى

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overrightarrow{ن} \cdot (-١ ، ٣ ، ٢) = (٢ ، ١ ، ٤) \cdot (-١ ، ٣ ، ٢)$

∴ $- س + ٣ ص + ٢ ع - ٩ = ٠$

٣٠

∵ $ع = ٢ + ٢ ك_١$ ∴ $ك_١ = \frac{ع - ٢}{٢}$

∵ $ص = ٤ - ك_١$ ∴ $ك_١ = ٤ - ص$

∴ $س = ٢ + ٢ \times \frac{ع - ٢}{٢} - ٤ (٤ - ص)$

∴ $٣ س = ٦ + ٢ ع - ٤ - ٤٨ + ١٢ ص$

∴ $٣ س - ٢ ع - ١٢ ص + ٤٦ = ٠$

٣١

$س = ٢ - ك_١ + ٦ ك_٢$ (١)

$ص = ٣ + ٣ ك_١ + ك_٢$ (٢)

$ع = ٥ + ٤ ك_١ - ٢ ك_٢$ (٣)

بضرب المعادلة (١) × ٣ والجمع إلى المعادلة (٢)

∴ $٣ س + ص = ٩ + ١٩ ك_٢$

∴ $ك_٢ = \frac{٣ س + ص - ٩}{١٩}$ (٤)

، بضرب المعادلة (٢) فى -٦ والجمع إلى المعادلة (١)

∴ $س - ٦ ص = -١٦ - ١٩ ك_١$

∴ $ك_١ = \frac{-(س - ٦ ص + ١٦)}{١٩}$ (٥)

بالتعويض من (٤) ، (٥) فى (٣)

∴ $ع = ٥ + \frac{-٤ س + ٢٤ ص - ٦٤}{١٩} + \frac{-٦ س - ٢ ص + ١٨}{١٩}$

∴ $١٩ ع = ٩٥ - ٤ س + ٢٤ ص - ٦٤ - ٦ س - ٢ ص + ١٨$

∴ $١٠ س - ٢٢ ص + ١٩ ع - ٤٩ = ٠$

٣٢

∵ $(٥ ، ٥ ، ٧)$ متجه اتجاه المستقيم

، $(٣ ، ٤ ، -٥)$ متجه اتجاه عمودى على المستوى

∵ $(٥ ، ٥ ، ٧) \cdot (٣ ، ٤ ، -٥) = ١٥ + ٢٠ - ٣٥ = ٠$

∴ المستقيم يوازى المستوى

، ∵ $(٣ ، -١ ، -٤)$ تقع على المستقيم وبالتعويض بها فى معادلة المستوى

∴ $٣ (٣) + ٤ (-١) - ٥ (-٤) = ٢٥$ متحقق المعادلة،

∴ المستقيم يقع فى المستوى.

٣٣

بالتعويض بالنقطة أ $(٢ ، ٣ ، ١)$ فى معادلة المستوى

∴ $(٢ ، ٣ ، ١) \cdot (٢ ، ٠ ، -١) = ٤ - ١ = ٣$ (تحقق)

∴ أ $(٢ ، ٣ ، ١)$ تقع فى المستوى

، ∵ $(١ ، -٢ ، ٢)$ متجه اتجاه المستقيم، $(٢ ، ٠ ، -١)$ متجه اتجاه عمودى على المستوى

∵ $(١ ، -٢ ، ٢) \cdot (٢ ، ٠ ، -١) =$ صفر

∴ المستقيم يوازى المستوى

، ∵ $(٣ ، ١ ، ٣) \in$ للمستقيم وبالتعويض بها فى معادلة المستوى

∴ $(٣ ، ١ ، ٣) \cdot (٢ ، ٠ ، -١) = ٦ - ٣ = ٣$ (تحقق)

∴ المستقيم يقع فى المستوى.

٣٤

∵ المتجه $(٢ ، ٣ ، ٤)$ هو متجه اتجاه للمستقيم

، ∵ المتجه $(١ ، \frac{٣}{٢} ، ٢)$ هو متجه اتجاه عمودى على المستوى

∵ $\frac{٢}{١} = \frac{٣}{\frac{٣}{٢}} = \frac{٤}{٢}$ ∴ المتجهان متوازيان

∴ المستقيم عمودى على المستوى.

٣٥

∵ $(١ ، -١ ، ١)$ متجه اتجاه للمستقيم

، $(٢ ، -١ ، ١)$ متجه اتجاه عمودى على المستوى

، بفرض أن θ قياس الزاوية بينهما

∴ $\text{جتا } \theta = \frac{|(١ ، -١ ، ١) \cdot (٢ ، -١ ، ١)|}{\sqrt{١ + ١ + ١} \sqrt{٤ + ١ + ١}} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$

∴ $\theta = ١٩^\circ ٢٨'$

٣٦

∵ $(٢ ، ٣ ، ٤)$ متجه اتجاه للمستقيم

، $(٢ ، ١ ، -٣)$ متجه اتجاه عمودى على المستوى

∴ $\text{جتا } \theta = \frac{|(٢ ، ٣ ، ٤) \cdot (٢ ، ١ ، -٣)|}{\sqrt{٤ + ٩ + ١٦} \sqrt{٤ + ١ + ٩}} = \frac{٤}{\sqrt{٢٩} \sqrt{١٤}}$

∴ ق $(د \theta) = ٢٣^\circ ٧٨'$

وهى الزاوية بين متجه اتجاه المستقيم والمتجه العمودى على المستوى

∴ قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم والمستوى

$= ٩٠^\circ - ٢٣^\circ ٧٨' = ٦٧^\circ ١١'$

٣٧

∵ $(٢ ، -١ ، ٣)$ متجه اتجاه للمستقيم

، $(٣ ، ٢ ، ١)$ متجه اتجاه عمودى على المستوى

∴ $\text{جتا } \theta = \frac{|(٢ ، -١ ، ٣) \cdot (٣ ، ٢ ، ١)|}{\sqrt{٤ + ١ + ٩} \sqrt{٩ + ٤ + ١}} = \frac{١}{٢}$

∴ $\theta = ٦٠^\circ$ وهى الزاوية بين متجه اتجاه المستقيم والمتجه العمودى على المستوى

∴ قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم والمستوى

$= ٩٠^\circ - ٦٠^\circ = ٣٠^\circ$

٣٨

∵ $\text{جتا } \theta = \frac{|(٢ ، -١ ، -٢) \cdot (م ، ١ ، ٠)|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤} \sqrt{م^٢ + ١ + ٠}}$

حيث $\theta = ٩٠^\circ - ٤٥^\circ = ٤٥^\circ$

، ∵ $\text{جتا } ٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{|٢ م - ١|}{٣ \sqrt{م^٢ + ١}}$

∴ $\sqrt{٢} |٢ م - ١| = ٣ \sqrt{م^٢ + ١}$ بتربيع الطرفين

∴ $٢ (٢ م - ١)^٢ = ٩ (م^٢ + ١)$

∴ $٨ م^٢ + ٨ م + ٢ = ٩ م^٢ + ٩$

∴ $م^٢ - ٨ م + ٧ = ٠$

∴ $(م - ١) (م - ٧) = ٠$

∴ $م = ١$ أو $م = ٧$

١٨

∵ $\overrightarrow{ر} = (١ ، ٢ ، -١) + ل(٠ ، -١ ، ٢)$

∴ س = ١ ، ص = ٢ − ل ، ع = −١ + ٢ ل

وبالتعويض فى معادلة المستوى لايجاد نقطة التقاطع

∴ ٢ (١) − (٢ − ل) + (−١ + ٢ ل) = ٥

∴ ل = ٢

∴ نقطة التقاطع هى (١ ، ٠ ، ٣)

∵ النقطة أ (١ ، ٢ ، −١) تقع على المستقيم

ونفرض أن مسقطها هى النقطة ب (س١ ، ص١ ، ع١)

∴ $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (س١ − ١ ، ص١ − ٢ ، ع١ + ١)

∴ $\overrightarrow{أ ب}$ يوازى المتجه $\overrightarrow{ن}$ = (٢ ، −١ ، ١)

∴ $\frac{س_١ - ١}{٢} = \frac{ص_١ - ٢}{-١} = \frac{ع_١ + ١}{١} = ق$

∴ س١ = ٢ ق + ١ ، ص١ = − ق + ٢

ع١ = ق − ١ ، ∵ النقطة ب ∈ المستوى

∴ ٢ (٢ ق + ١) − (− ق + ٢) + (ق − ١) = ٥

∴ ق = ١ ∴ النقطة هى (٣ ، ١ ، ٠)

∴ النقطتان (١ ، ٠ ، ٣) ، (٣ ، ١ ، ٠)

تنتميان إلى المستقيم

∴ متجه اتجاه المستقيم $(\overrightarrow{ق}) = (٢ ، ١ ، -٢)$

∴ معادلة المستقيم هى

$\overrightarrow{ر} = (١ ، ٠ ، ٣) + ل(٢ ، ١ ، -٢)$

أى أن $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع - ٣}{-٢}$

١٩

لإيجاد نقطة تقاطع المستويات الثلاثة نقوم بحل المعادلات الثلاثة معًا بطريقة كرامر

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ٣ & -١ & ١ \end{vmatrix}$

= ٢ × صفر − ١ × ٤ + (−١) × −٤ = ٨

$\Delta_س = \begin{vmatrix} -١ & ١ & -١ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٦ & -١ & ١ \end{vmatrix}$

= −١ × صفر − ١ × −٨ + (−١) × −٨ = ١٦

$\Delta_ص = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & -١ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٦ & ١ \end{vmatrix}$

= ٢ × −٨ − ١ × −٤ + (−١) × ٢٠ = −٢٠

$\Delta_ع = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ٣ & -١ & ٦ \end{vmatrix}$

= ٢ × ٨ − ١ × صفر + (−١) × −٤ = ٢٠

∴ س = $\frac{١٦}{٨}$ = ٢ ، ص = $\frac{-٢٠}{٨} = -\frac{٥}{٢}$

ع = $\frac{٢٠}{٨} = \frac{٥}{٢}$

∴ نقطة تقاطع المستويات الثلاثة هى $(٢ ، -\frac{٥}{٢} ، \frac{٥}{٢})$

اجابات تمارين 7

١

① $\overrightarrow{ن_١} = (٤ ، ٤ ، -٢) ، \overrightarrow{ن_٢} = (٢ ، ١ ، ٢)$

∴ جتا θ = $\frac{|٢ + ٤ - ٨|}{\sqrt{٤ + ١٦ + ١٦} \times \sqrt{٤ + ١ + ٤}} = \frac{٦}{١٨} = \frac{\sqrt{٦}}{٥}$

② $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، -١ ، ٤) ، \overrightarrow{ن_٢} = (٣ ، -١ ، ٢)$

∴ جتا θ = $\frac{|٦ + ١ + ٨|}{\sqrt{٤ + ١ + ١٦} \times \sqrt{٩ + ١ + ٤}} = \frac{١٥}{١٤} = \frac{\sqrt{٦}}{٥}$

③ $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، -١ ، ٢) ، \overrightarrow{ن_٢} = (٣ ، ٢ ، -٦)$

∴ جتا θ = $\frac{|١٢ - ٢ - ٦|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤} \times \sqrt{٩ + ٤ + ٣٦}} = \frac{٤}{٤٩}$

٢

① $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، -١ ، ١) ، \overrightarrow{ن_٢} = (٣ ، ٢ ، -٢)$

∴ جتا θ = $\frac{|٦ - ٢ - ٢|}{\sqrt{٤ + ١ + ١} \times \sqrt{٩ + ٤ + ٤}} = \frac{٢}{٥\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٥}$

∴ θ = ٧٨° ٢١ ٢٤ ٢

② $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، ١ ، -١) ، \overrightarrow{ن_٢} = (٢ ، -٢ ، ٣)$

∴ جتا θ = $\frac{|٤ - ٢ - ٣|}{\sqrt{٤ + ١ + ١} \times \sqrt{٤ + ٤ + ٩}} = \frac{٣}{٢٩} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢\sqrt{٢٩}}$

∴ θ = ٦٣° ٤٦ ١٠ ٢

③ $\overrightarrow{ن_١} = (٠ ، ١ ، -٠) ، \overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٣ ، ٥)$

∴ جتا θ = $\frac{|٠ - ٣ - ٠|}{\sqrt{٠ + ١ + ٠} \times \sqrt{١ + ٩ + ٢٥}} = \frac{٣}{٣٥} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٥\sqrt{٣٥}}$

∴ θ = ٥٩° ٢١ ٤٧ ٢

④ $\overrightarrow{ن_١} = (١ ، ٣ ، -١) ، \overrightarrow{ن_٢} = (٢ ، ٢ ، ٢)$

∴ جتا θ = $\frac{|٢ + ٦ - ٢|}{\sqrt{١ + ٩ + ١} \times \sqrt{٤ + ٤ + ٤}}$ = صفر

∴ θ = ٩٠°

⑤ $\overrightarrow{ن_١} = (٢ ، -١ ، ٠) ، \overrightarrow{ن_٢} = (١ ، -٢ ، ٠)$

∴ جتا θ = $\frac{|٢ + ٢ + ٠|}{\sqrt{٤ + ١ + ٠} \times \sqrt{١ + ٤ + ٠}} = \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

∴ θ = ٤٥°

⑥ $\overrightarrow{ن_١} = (١ ، -٣ ، ٢) ، \overrightarrow{ن_٢} = (٢ ، ١ ، -١)$

∴ جتا θ = $\frac{|٢ - ٣ - ٢|}{\sqrt{١ + ٩ + ٤} \times \sqrt{٤ + ١ + ١}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{١٤}$

∴ θ = ٧٠° ٥٢ ٢٦ ٢

٣

① ∵ المستويين متوازيان

∴ $\frac{٢}{ل} = \frac{-١}{-٤} = \frac{٤}{٨}$ ∴ ل = ٨ ، ق = $\frac{١}{٢}$

② ∵ المستويين متوازيان

∴ $\frac{٣}{٥} = \frac{ق}{ل} = \frac{-٥}{-١٠}$ ∴ ق = $\frac{١}{٢}$ ، ل = ١٠

③ ∵ المستويين متوازيان

∴ $\frac{٢}{٥} = \frac{ق}{-٤} = \frac{-١}{ل}$ ∴ ل = ق = −١٦

٤

① ∵ المستويين متعامدان

∴ (٣ ، −٥ ، ٢) . (٢ ، ٤ ، −١) = ٠

∴ ٩ − ١٦ − ٢ ق = ٠ ∴ ق = −٣٥

② ∵ المستويين متعامدان

∴ (١ ، −٣ ، ٥) . (٢ ، ٢ ، ق) = ٠

∴ ٢ − ٦ + ٥ ق = ٠ ∴ ق = ٣

③ ∵ المستويين متعامدان

∴ (٣ ، ٥ ، ق) . (١ ، ٢ ، ٢) = ٠

∴ ٣ + ١٥ + ٢ ق = ٠ ∴ ق = −٩

④ ∵ المستويين متعامدان

∴ (٧ ، −٣ ، ٠) . (١ ، ١ ، −٣) = ٠

∴ ٧ − ٣ = ٠ ∴ ق = ٤

٥

∵ $\frac{٢}{٣} \neq \frac{ق}{٤}$

∴ المستويان متقاطعان

∵ (٢ ، ٣ ، ١) . (٣ ، −٦ ، ٠) = ٦ − ١٨ + ٠

= −١٢ ≠ صفر

∴ المستويان متقاطعان وغير متعامدين

٦

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (جـ) (٥) (د)

(٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (د) (٩) (د) (١٠) (ب)

(١١) (د) (١٢) (ب) (١٣) (جـ) (١٤) (د) (١٥) (ب)

(١٦) (ب) (١٧) (جـ) (١٨) (ب) (١٩) (جـ) (٢٠) (ب)

(٢١) (د) (٢٢) (جـ) (٢٣) (جـ) (٢٤) (جـ) (٢٥) (أ)

(٢٦) (ب) (٢٧) (جـ) (٢٨) (ب) (٢٩) (جـ) (٣٠) (د)

(٣١) (د) (٣٢) (ب) (٣٣) (جـ) (٣٤) (جـ) (٣٥) (أ)

(٣٦) (د) (٣٧) (جـ) (٣٨) (د) (٣٩) (جـ)

٧

① معادلتا المستويين هما :

٣ س − ص + ٢ ع = ٣ (١)

، س − ٢ ص + ٥ ع = ٢ (٢)

∴ $\frac{٣}{١} \neq \frac{-١}{-٢}$ ∴ المستويان متقاطعان

، بضرب المعادلة (١) × −٢ والجمع إلى (٢)

∴ ٥ − ص + ع = −٤ (٣)

∴ ع = −٤ + ٥ + ص

وبضرب المعادلة (٢) × −٣ والجمع إلى (١)

∴ ٥ ص − ١٣ ع = −٣ (٤)

∴ ع = $\frac{٥ ص + ٣}{١٣}$

من (٣) ، (٤)

∴ الصورة الاحداثية لمعادلة خط التقاطع هى

− ٤ + ٥ س = $\frac{ص + ٢}{١٣}$ = ع

② معادلتا المستويين هما :

س + ٢ ص − ٢ ع = ١ (١)

، ٢ س + ص − ٢ ع = ٥ (٢)

بضرب المعادلة (١) × −٢ والجمع إلى (٢)

∴ − ٣ ص + ٢ ع = ٣ ويوضع ص = ق

∴ ع = $\frac{٣ + ٣ ق}{٢}$ وبالتعويض فى (١)

∴ س + ٢ ق − ٢ (٢ + ٣ ق) = ١

∴ س = ٧ + ٤ ق

∴ المعادلات البارامترية لخط التقاطع هى

س = ٧ + ٤ ق ، ص = ق ، ع = ٣ + ٣ ق

③ معادلتا المستويين هما :

(١) ، (٢) ...

∴ متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{ت} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ١ & ٤ & -٢ \end{vmatrix}$

= (−٢ ، ٧ ، ١٣)

، بوضع س = ٠ فى معادلتى المستويين

∴ (٠ ، ص ، ع) . (٣ ، −١ ، ٢) = ١

∴ − ص + ع = ١ (٣)

، (٠ ، ص ، ع) . (١ ، ٤ ، −٢) = ٢

∴ ٤ ص − ٢ ع = ٢

∴ ٢ ص − ع = ١ (٤)

وبجمع (٣) ، (٤)

∴ ص = ٢ وبالتعويض فى (٣) ∴ ع = ٣

∴ النقطة (٠ ، ٢ ، ٣) تقع على خط التقاطع

∴ الصورة الاتجاهية لمعادلة خط التقاطع هى

$\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢ ، ٣) + ك (−٢ ، ٧ ، ١٣)

٨

متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{ت} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

= $\overrightarrow{ت} - \overrightarrow{ص}$ = (١ ، ٠ ، −١)

وبوضع س = ٠ فى المعادلتين

∴ ع = ٠ ، ص = ١

∴ خط التقاطع يمر بالنقطة (٠ ، ١ ، ٠)

∴ معادلة خط التقاطع هى

$\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ١ ، ٠) + ك (١ ، ٠ ، −١) (الصورة المتجهة)

∴ س = ك ، ص = ١ ، ع = −ك (الصورة البارامترية)

٩

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (جـ) (٥) (د)

(٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (د) (٩) (د) (١٠) (ب)

(١١) (د) (١٢) (ب) (١٣) (جـ) (١٤) (د) (١٥) (ب)

(١٦) (ب) (١٧) (د) (١٨) (جـ) (١٩) (جـ) (٢٠) (ب)

٣

معادلتا المستويين هما :

٢ س − ص + ع = ٢ (١)

، س − ٢ ص + ٢ ع = ١ (٢)

∴ $\frac{١}{٢} \neq \frac{-١}{-٢}$ ∴ المستويان متقاطعان

وبضرب المعادلة (١) × −٢ والجمع إلى (٢)

∴ ٧ س − ٤ ص = ٥

∴ س = $\frac{٤ ص + ٥}{٧}$ (٣)

وبضرب المعادلة (١) × −٢ والجمع إلى (٢)

∴ − ٥ ص + ٤ ع = −٣

∴ ص = $\frac{٤ ع + ٣}{٥}$ (٤)

من (٣) ، (٤)

∴ الصورة الاحداثية لمعادلة خط التقاطع هى

س = $\frac{٥ ص + ٤}{٧}$ = $\frac{٤ ع + ٣}{٥}$

١٠

متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{ت} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$

= (−٦ ، ٤ ، ٢)

، متجه اتجاه المستقيم المعطى : (٣ ، −٢ ، ١)

∴ $\frac{-٦}{٣} \neq \frac{٤}{-٢} \neq \frac{٢}{١}$

∴ خط تقاطع المستويين يوازى المستقيم المعطى

١١

متجه الاتجاه العمودى للمستوى المطلوب

= (١ ، ٢ ، ٠) × (٣ ، ٠ ، ١)

= $\begin{vmatrix} \overrightarrow{ت} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ = (٢ ، −١ ، −٦)

∴ معادلة المستوى المطلوب هو

٢ س − ص − ٦ ع = ٣

١٢

متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{ت} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

= (٠ ، ١ ، −١)

∴ خط التقاطع يقع فى المستوى المطلوب

∴ المتجه (٣ ، ٥ ، ١) يوازى المستوى المطلوب

∴ $\overrightarrow{م_١ م_٢}$ = (٢ ، ٢ ، ٠) − (٥ ، ٥ ، ٣)

∴ (٠ ، ٧ ، ٥) يوازى المستوى المطلوب

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

= $\begin{vmatrix} \overrightarrow{ت} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ٠ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$ = (١٨ ، ١٤ ، ١٦)

، بوضع س = ٠ فى كل من معادلتى المستويين

∴ ص + ع = ١٠ ، ص − ع = ١٠

وبحل المعادلتين معًا ∴ ص = ١٠ ، ع = ٠

∴ معادلة المستوى المطلوب هو

∴ النقطة (٠ ، −١ ، ٠) تقع على خط التقاطع

∴ النقطة (٠ ، −١ ، ٠) تقع على المستوى المطلوب

∴ معادلة المستوى المطلوب هي :

$\overleftrightarrow{n}$. (١٨ ، ١٤ ، ١٦) = (١٨ ، ١٤ ، ١٦) . (٠ ، −١ ، ٠)

∴ ١٨ س + ١٤ ص + ١٦ ع = −١٤

١٤

∵ المستوى ٣ س + ٢ ص + ع + ٦ = ٠

عموديًا على المستوى المطلوب.

∴ المتجه (٣ ، ٢ ، ١) يوازى المستوى المطلوب

، ∵ متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \overleftrightarrow{س} & \overleftrightarrow{ص} & \overleftrightarrow{ع} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١- & ١ & ٢ \end{vmatrix}$

= (−٥ ، ٧ ، −٣)

∴ المتجه (−٥ ، ٧ ، −٣) يوازى المستوى المطلوب أيضًا

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

$= \begin{vmatrix} \overleftrightarrow{س} & \overleftrightarrow{ص} & \overleftrightarrow{ع} \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٣- & ٧ & ٥- \end{vmatrix}$ = (−١٣ ، ٤ ، ٣١)

، بوضع س = ٠ فى معادلتى المستويين

∴ ٢ ص + ٣ ع = ٤ ، ص − ع = −٨

وبحل المعادلتين معًا ∴ ص = −٤ ، ع = ٤

∴ النقطة (٠ ، −٤ ، ٤) تقع على خط التقاطع

∴ النقطة (٠ ، −٤ ، ٤) تقع على المستوى المطلوب

∴ معادلة المستوى المطلوب هى

$\overleftrightarrow{n}$. (−١٣ ، ٤ ، ٣١) = (٠ ، −٤ ، ٤)

. (−١٣ ، ٤ ، ٣١)

∴ −١٣ س + ٤ ص + ٣١ ع = ١٠٨

١٥

• معادلة خط تقاطع المستويين :

٦ س + ٤ ص + ٣ ع = −٥ (١)

، ٢ س + ص + ع = ٢ (٢)

بضرب المعادلة (٢) × −٣ والجمع إلى (١)

∴ ص = −١١ وبالتعويض فى (١)

∴ ٦ س − ٤٤ + ٣ ع = −٥

∴ ٢ س = ١٣ − ع

∴ معادلة خط التقاطع هى :

٢ س = ١٣ − ع ، ص = −١١

∴ النقطة (٠ ، −١١ ، ١٣) تقع على خط التقاطع

، المتجه ($\frac{١}{٢}$ ، ٠ ، −١) متجه اتجاه لخط التقاطع

∴ المتجه ($\frac{١}{٢}$ ، ٠ ، −١) يوازى المستوى المطلوب

، ∵ المتجه (٠ ، −١١ ، ١٣) − (٢ ، −٣ ، ٢)

= (−٢ ، −٨ ، ١١) يقع فى المستوى المطلوب

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

$= \begin{vmatrix} \overleftrightarrow{س} & \overleftrightarrow{ص} & \overleftrightarrow{ع} \\ ١- & ٠ & \frac{١}{٢} \\ ٢- & ٨- & ١١ \end{vmatrix}$ = (−٨ ، −$\frac{٧}{٢}$ ، −٤)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى

$\overleftrightarrow{n}$. (−٨ ، −$\frac{٧}{٢}$ ، −٤)

= (٢ ، −٣ ، ٢) . (−٨ ، −$\frac{٧}{٢}$ ، −٤)

∴ −٨ س − $\frac{٧}{٢}$ ص − ٤ ع = $\frac{-٢٧}{٢}$

∴ ١٦ س + ٧ ص + ٨ ع = ٢٧

١٦

البعد المطلوب = $\frac{|٨ (٣) − ٢ (−٥) + ٢ − ٥|}{\sqrt{١ + ٤ + ٩٤}}$

= $\frac{٣١}{\sqrt{١٩٢}}$ وحدة طول.

١٧

معادلة المستوى هى :

٢ س + ٢ ص − ع − ٥ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|٢ (١) + ٢ (−١) − ٣ − ٥|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}}$

= $\frac{٨}{٣}$ وحدة طول.

١٨

معادلة المستوى هى :

س − ٢ ص + ٤ ع − ٩ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|٢ − ٢ (١) + ٤ (−١) − ٩|}{\sqrt{١ + ٤ + ١٦}}$

= $\frac{١٣}{\sqrt{٢١}}$ وحدة طول.

١٩

$\frac{|٢ (٠) + (−١) − (٢) + ق|}{\sqrt{١ + ١ + ٢}}$ = ٢ ∵

∴ |ق − ٣| = ٤ ∴ ق − ٣ = ± ٤

∴ ق = ٧ أ، ق = −١

٢٠

طول العمود من مركز الكرة إلى المستوى = نق

∴ $\frac{|٢ (٢) + ٦ (−١) − ٣ (−٢) + ق|}{\sqrt{٩ + ٣٦ + ٤}}$ = ٣

∴ |٤ + ق| = ٢١

∴ ٤ + ق = ٢١ ∴ ق = ١٧

أ، ٤ + ق = −٢١ ∴ ق = −٢٥

٢١

نق للكرة = طول العمود المرسوم من مركزها إلى المستوى

∴ نق = $\frac{|١ (١) + ٢ − ١ (−١)|}{\sqrt{١ + ١ + ١}}$ = $\sqrt{٣}$ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هى

(س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} + (ع − ١)^{٢} = ٣

٢٢

بفرض النقطة (أ ، ٠ ، ٠)

∴ $\frac{|١ + ٢ أ|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}}$ = $\frac{|٢ − ٢ أ|}{\sqrt{٢٥ + ٢٥ + ١٤٤}}$

∴ ٣ |١ + ٢ أ| = ١ |٢ − ٢ أ| ∴ ٢٥ |١ + ٢ أ| = |٢ − ٢ أ|

∴ ٣ (١ + ٢ أ)^{٢} = ± ٢٥ (٢ − ٢ أ) (١)

∴ ٣ (١ + ٤ أ + ٤ أ^{٢}) = ٢٥ (٢ − ٢ أ)

∴ ٣ + ٣٦ أ^{٢} + ٢٥ = ٥٠ − ٢٥ أ

∴ ٢٨ = ٣٦ أ^{٢} + ٢٥ أ ∴ أ = ٢

أ، ٣ (١ + ٢ أ)^{٢} = −٢٥ (٢ − ٢ أ) (١)

∴ ٣ + ٣٦ أ^{٢} = − ٥٠ + ٢٥ أ

∴ ٢٢ = ٨٦ أ^{٢} ∴ أ^{٢} = $\frac{١١}{٤٣}$

∴ النقطة هى (٢ ، ٠ ، ٠) أ، ($\frac{١١}{٤٣}$ ، ٠ ، ٠)

٢٣

∵ المستوى المطلوب يوازى المستوى

٢ س + ص − ٤ ع = ٠

∴ معادلته هى : ٢ س + ص − ٤ ع + ق = ٠

، ∵ طول العمود من (١ ، ٢ ، ٠) عليه = $\sqrt{٢١}$

∴ $\frac{|٢ (١) + ٢ − ٤ (٠) + ق|}{\sqrt{٤ + ١ + ١٦}}$ = $\sqrt{٢١}$

∴ |٤ + ق| = ٢١ ∴ ٤ + ق = ± ٢١

أ، ق = ١٧ ، ٤ + ق = −٢١ ∴ ق = −٢٥

∴ معادلة المستوى هى

٢ س + ص − ٤ ع + ١٧ = ٠

أ، ٢ س + ص − ٤ ع − ٢٥ = ٠

٢٤

$\overrightarrow{م ن}$ = (−٣ ، ٢ ، ٢)

، $\overrightarrow{م ع}$ = (٦ ، −٦ ، −٥)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى

= $\overrightarrow{م ن} \times \overrightarrow{م ع} = \begin{vmatrix} \overleftrightarrow{س} & \overleftrightarrow{ص} & \overleftrightarrow{ع} \\ ٢ & ٢ & ٣- \\ ٦ & ٦- & ٥- \end{vmatrix}$ = (٢ ، −٢ ، ٦)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overleftrightarrow{n}$. (٢ ، −٣ ، ٦) = (١ ، −١ ، ١) . (٢ ، −٣ ، ٦)

∴ ٢ س − ٣ ص + ٦ ع − ١١ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|٢ (−١) − ٣ (١) + ٦ (−٢) − ١١|}{\sqrt{٤ + ٩ + ٣٦}}$

= ٤ وحدة طول.

٢٥

∴ $\frac{١}{٢} = \frac{-٢}{-٤} \neq \frac{٢}{٤} = \frac{-١}{-٢}$

∴ المستويان متوازيان وغير منطبقين

∴ نوجد نقطة ∋ للمستوى الأول وذلك بفرض

س = ٠ ، ص = ٠

∴ ع = $\frac{١}{٢}$

∴ (٠ ، ٠ ، $\frac{١}{٢}$) ∋ للمستوى الأول

∴ المسافة بين المستويين

= $\frac{|٢ (٠) − ٤ (٠) + ٤ (\frac{١}{٢}) − ٣|}{\sqrt{١٦ + ١٦ + ٤}}$ = $\frac{١}{٤}$ وحدة طول.

٢٦

∵ $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} \neq \frac{-٨}{٥}$

∴ المستويان متوازيان وغير منطبقين

، بوضع س = ٠ ، ص = ٠ فى معادلة المستوى الأول

∴ ع = ٤

∴ (٠ ، ٠ ، ٤) ∋ للمستوى الأول

∴ المسافة بين المستويين

= $\frac{|٤ (٠) + ٢ (٠) + ٤ (٤) + ٥|}{\sqrt{١٦ + ٤ + ١٦}}$

= $\frac{٢١}{٦}$ = ٣ $\frac{١}{٢}$ وحدة طول.

٢٧

بفرض (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ، ع$_{١}$) ∋ للمستوى ط$_{١}$

∴ المسافة بين المستويين = طول العمود المرسوم

من (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ، ع$_{١}$)

إلى المستوى ط$_{٢}$

∴ المسافة بين المستويين =

$\frac{|أ س_{١} + ب ص_{١} + حـ ع_{١} + ك_{٢}|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢}}}$

، من معادلة المستوى الأول

∴ أ س$_{١}$ + ب ص$_{١}$ + حـ ع$_{١}$ = −ك$_{١}$

∴ المسافة بين المستويين

= $\frac{|ك_{٢} − ك_{١}|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢}}}$ وحدة طول.

٢٨

∵ (١ ، −١ ، ٤) متجه اتجاه للمستقيم

، (١ ، ٥ ، ١) متجه اتجاه عمودى على المستوى

∴ ∵ (١ ، −١ ، ٤) . (١ ، ٥ ، ١) = ١ − ٥ + ٤ = ٠

∴ المستقيم يوازى المستوى

∵ (٢ ، −٢ ، ٣) ∋ للمستقيم ، معادلة المستوى هى

س + ٥ ص + ع − ٥ = ٠

∴ البعد بين المستقيم والمستوى

= طول العمود من (٢ ، −٢ ، ٣) إلى المستوى

= $\frac{|٢ + ٥ (−٢) + ٣ − ٥|}{\sqrt{١ + ٢٥ + ١}}$ = $\frac{١٠}{\sqrt{٢٧}}$ وحدة طول.

٢٩

① $\overrightarrow{أ ب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، −١ ، ٣) − (٠ ، −١ ، ١)

= (٢ ، ٠ ، ٢)

، $\overrightarrow{ب حـ}$ = $\overrightarrow{حـ}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (−١ ، −٢ ، ٠)

− (٢ ، −١ ، ٣) = (−٣ ، −١ ، −١)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ

= $\overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ}$

$= \begin{vmatrix} \overleftrightarrow{س} & \overleftrightarrow{ص} & \overleftrightarrow{ع} \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ٣- & ١- & ١- \end{vmatrix}$ = ٢ $\overleftrightarrow{س}$ − ٤ $\overleftrightarrow{ص}$ − ٢ $\overleftrightarrow{ع}$

② معادلة المستوى أ ب حـ هى :

$\overleftrightarrow{n}$. (٢ ، −٤ ، −٢) = (٠ ، −١ ، ١) . (٢ ، −٤ ، −٢)

٢ س − ٤ ص − ٢ ع + ٢ = ٠

∴ طول العمود من ء

= $\frac{|٢ (٧) − ٤ (−٤) − ٢ (٢) + ٢|}{\sqrt{٤ + ١٦ + ٤}}$ = ٢ $\sqrt{٦}$ وحدة طول.

③ $\overrightarrow{ب ء}$ = $\overrightarrow{ء}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (٧ ، −٤ ، ٢) − (٢ ، −١ ، ٣)

= (٥ ، −٣ ، −١)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى ب حـ ء

= $\overrightarrow{ب ء} \times \overrightarrow{ب حـ}$ = $\begin{vmatrix} \overleftrightarrow{س} & \overleftrightarrow{ص} & \overleftrightarrow{ع} \\ ٥ & ٣- & ١- \\ ٣- & ١- & ١- \end{vmatrix}$

= (٢ ، ٨ ، −١٤)

، ∵ (متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ)

. (متجه الاتجاه العمودى على المستوى ب حـ ء)

= (٢ ، −٤ ، −٢) . (٢ ، ٨ ، −١٤) = صفر

∴ المستويان متعامدان

٣٠

① متجه الاتجاه العمودى على المستوى و ع ب

= $\overrightarrow{و ع} \times \overrightarrow{و ب} = \begin{vmatrix} \overleftrightarrow{س} & \overleftrightarrow{ص} & \overleftrightarrow{ع} \\ ٧ & ٤- & ٢ \\ ٢ & ١- & ٣ \end{vmatrix}$

= (−١٠ ، −١٧ ، ١)

، ∵ ب ∋ المستويين

∴ معادلة خط التقاطع هى

$\overrightarrow{ن}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + ق (−٣٨ ، ١٨ ، −٧٤)

، ∵ ب ∋ للمستويين

∴ معادلة خط التقاطع هى

$\overrightarrow{ن}$ = (٢ ، −٤ ، −٢) + ق (−٣٨ ، ١٨ ، −٧٤)

٣١

② معادلة المستوى المار بالنقطة ب

= (٢ ، −٤ ، −٢) . (−١٠ ، −١٧ ، ١)

∴ ٢ س − ٤ ص − ٢ ع − ٢٠ = ٠

∴ ٢ س − ٤ ص − ٢ ع − ١٢ = ٠

③ المعادلة الإحداثية للمستوى ص

$= \begin{vmatrix} س − ١ & ص − ٤ & ع − ٢ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٨ - ٤ & ١ - ٠ \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} س − ١ & ص − ٤ & ع − ٢ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$

∴ (س − ١) (ص − ٤) (ع − ٢) = ٠

∴ −٣ (ص − ٤) − ٤ (ع − ٢) = ٠

∴ ٣ ص + ٤ ع − ٢٠ = ٠

② معادلة المستوى ص

$\overrightarrow{ن}$. (١ ، ٢ ، ٢) = (٢ ، ٠ ، ٣) . (١ ، ٢ ، ٢)

∴ س + ٢ ص + ٢ ع − ١٢ = ٠

∴ النقطة (٠ ، −١ ، ٠) تقع على خط التقاطع

∴ النقطة (٠ ، −١ ، ٠) تقع على المستوى المطلوب

∴ معادلة المستوى المطلوب هي :

$\overrightarrow{ن}$. (١٨ ، ١٤ ، ١٦) = (١٨ ، ١٤ ، ١٦) . (٠ ، −١ ، ٠)

∴ ١٨ س + ١٤ ص + ١٦ ع = −١٤

١٤

∵ المستوى ٣ س + ٢ ص + ع + ٦ = ٠

عموديًا على المستوى المطلوب.

∴ المتجه (٣ ، ٢ ، ١) يوازى المستوى المطلوب

، ∵ متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١- & ١ & ٢ \end{vmatrix}$

= (−٥ ، ٧ ، −٣)

∴ المتجه (−٥ ، ٧ ، −٣) يوازى المستوى المطلوب أيضًا

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٧ & ١- & ٣- \end{vmatrix}$ = (−١٣ ، ٤ ، ٢١)

، بوضع س = ٠ فى معادلتى المستويين

∴ ٢ ص + ٣ ع = ٤ ، ص − ع = −٨

وبحل المعادلتين معًا ∴ ص = −٤ ، ع = ٤

∴ النقطة (٠ ، −٤ ، ٤) تقع على خط التقاطع

∴ النقطة (٠ ، −٤ ، ٤) تقع على المستوى المطلوب

∴ معادلة المستوى المطلوب هي :

$\overrightarrow{ن}$. (−١٣ ، ٤ ، ٢١) = (٠ ، −٤ ، ٤)

. (−١٣ ، ٤ ، ٢١)

∴ −١٣ س + ٤ ص + ٢١ ع = ١٠٨

١٥

• معادلة خط تقاطع المستويين :

٦ س + ٤ ص + ٣ ع = −٥ (١)

، ٢ س + ص + ع = ٢ (٢)

بضرب المعادلة (٢) × −٣ والجمع إلى (١)

∴ ص = −١١ وبالتعويض فى (١)

∴ ٦ س − ٤٤ + ٣ ع = −٥

∴ ٢ س = ١٣ − ع

∴ معادلة خط التقاطع هى :

٢ س = ١٣ − ع ، ص = −١١

∴ النقطة (٠ ، −١١ ، ١٣) تقع على خط التقاطع

، المتجه ($\frac{١}{٢}$ ، ٠ ، −١) متجه اتجاه لخط التقاطع

∴ المتجه ($\frac{١}{٢}$ ، ٠ ، −١) يوازى المستوى المطلوب

، ∵ المتجه (٠ ، −١١ ، ١٣) − (٢ ، −٣ ، ٢)

= (−٢ ، −٨ ، ١١) يقع فى المستوى المطلوب

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٠ & \frac{١}{٢} \\ ١- & ٨- & ١١ \end{vmatrix}$ = (−٨ ، $\frac{٧}{٢}$ ، −٤)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overrightarrow{ن}$. (−٨ ، $\frac{٧}{٢}$ ، −٤)

= (٢ ، −٣ ، ٢) . (−٨ ، $\frac{٧}{٢}$ ، −٤)

∴ −٨ س + $\frac{٧}{٢}$ ص − ٤ ع = $\frac{-٢٧}{٢}$

∴ ١٦ س + ٧ ص + ٨ ع = ٢٧

١٦

البعد المطلوب = $\frac{|٨ (٣) - ٢ (-٥) + ٢ + ٥|}{\sqrt{١ + ٤ + ٦٤}}$

= $\frac{٣١}{\sqrt{٦٩}}$ وحدة طول.

١٧

معادلة المستوى هى :

٢ س + ٢ ص − ع − ٥ = ٠ .

∴ طول العمود = $\frac{|٢ (١) + ٢ (-١) - ٣ - ٥|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}}$

= $\frac{٨}{٣}$ وحدة طول.

١٨

معادلة المستوى هى :

س − ٢ ص + ٤ ع − ٩ = ٠ .

∴ طول العمود = $\frac{|٢ - ٢ (١) + ٤ (-١) - ٩|}{\sqrt{١ + ٤ + ١٦}}$

= $\frac{١٣}{\sqrt{٢١}}$ وحدة طول.

١٩

∵ $\frac{|\sqrt{٦} (٠) + (-١) - (٢) + ك|}{\sqrt{١ + ١ + ٢}}$ = ٢

∴ |ك − ٣| = ٤ ∴ ك − ٣ = ± ٤

∴ ك = ٧ أ، ك = −١

٢٠

طول العمود من مركز الكرة إلى المستوى = نق

∴ $\frac{|٢ (٢) + ٦ (-١) - ٣ (-٢) + ك|}{\sqrt{٩ + ٣٦ + ٤}}$ = ٣

∴ |٤ + ك| = ٢١

∴ ٤ + ك = ٢١ ∴ ك = ١٧

أ، ٤ + ك = −٢١ ∴ ك = −٢٥

٢١

نق للكرة = طول العمود المرسوم من مركزها إلى المستوى

∴ نق = $\frac{|١ - ١ + ٢ + ١|}{\sqrt{١ + ١ + ١}}$ = $\sqrt{٣}$ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هى :

(س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} + (ع − ١)^{٢} = ٣

٢٢

بفرض النقطة (٢ ، ٠ ، ٠)

∴ $\frac{|١ + ٢ \sqrt{١٢}|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥٦ + ٢٢٥}} = \frac{|٢ - ١|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}}$

∴ ٣ |١٢ ف + ١| = ٢٥ |ف − ١|

∴ ٣ (١٢ ف + ١) = ± ٢٥ (ف − ١)

∴ ٣ (١٢ ف + ١) = ٢٥ (ف − ١)

∴ ٣٦ ف + ٣ + ٥٠ = ف ٢٥ − ٢٥

∴ ١٤ ف = ٢٨ ∴ ف = ٢

أ، ٣ (١٢ ف + ١) = −٢٥ (ف − ١)

∴ ٣٦ ف + ٣ + ٥٠ = − ف ٢٥ + ٢٥

∴ ٨٦ ف = ٢٢ ∴ ف = $\frac{١١}{٤٣}$

∴ النقطة هى (٢ ، ٠ ، ٠) أ، ($\frac{١١}{٤٣}$ ، ٠ ، ٠)

٢٣

∵ المستوى المطلوب يوازى المستوى

٢ س + ص − ٤ ع = ٠ .

∴ معادلته هى : ٢ س + ص − ٤ ع + ء = ٠ .

، ∵ طول العمود من (١ ، ٢ ، ٠) عليه = $\sqrt{٢١}$

∴ $\frac{|٢ (١) + ٢ - ٤ (٠) + ء|}{\sqrt{١٦ + ١ + ٤}} = \sqrt{٢١}$

∴ |٤ + ء| = ٢١ ∴ ٤ + ء = ٢١

∴ ء = ١٧ أ، ٤ + ء = − ٢١ ∴ ء = −٢٥

∴ معادلة المستوى هى :

٢ س + ص − ٤ ع + ١٧ = ٠ .

أ، ٢ س + ص − ٤ ع − ٢٥ = ٠ .

٢٤

$\overrightarrow{م_{١} م_{٢}}$ = (−٣ ، ٢ ، ٢)

، $\overrightarrow{م_{١} م_{٣}}$ = (٦ ، −٦ ، −٥)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى

= $\overrightarrow{م_{١} م_{٢}} \times \overrightarrow{م_{١} م_{٣}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٣ & ٢ & ٢ \\ ٦ & -٦ & -٥ \end{vmatrix}$ = (٢ ، ٣ ، ٦)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overrightarrow{ن}$. (٢ ، ٣ ، ٦) = (١ ، −١ ، ١) . (٢ ، ٣ ، ٦)

∴ ٢ س + ٣ ص + ٦ ع − ١١ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|٢ (-١) + ٣ (١) + ٦ (-٢) - ١١|}{\sqrt{٣٦ + ٩ + ٤}}$

= ٤ وحدة طول.

٢٥

∴ $\frac{١}{٢} = \frac{-٢}{-٤} \neq \frac{٢}{٤} = \frac{-١}{-٢}$

∴ المستويان متوازيان وغير منطبقين

∴ نوجد نقطة ∈ للمستوى الأول وذلك بفرض

س = ٠ ، ص = ٠

∴ ع = $\frac{١}{٢}$

∴ (٠ ، ٠ ، $\frac{١}{٢}$) ∈ للمستوى الأول

∴ المسافة بين المستويين

= $\frac{|٢ (-١) - ٤ (٠) + ٤ (\frac{١}{٢}) - ٢|}{\sqrt{١٦ + ١٦ + ٤}}$ = $\frac{١}{٦}$ وحدة طول.

٢٦

∵ $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{-٢}{-٤} \neq \frac{٢}{-٢}$

∴ المستويان متوازيان وغير منطبقين

، بوضع س = ٠ ، ص = ٠ فى معادلة المستوى الأول

∴ ع = ٤

∴ (٠ ، ٠ ، ٤) ∈ للمستوى الأول

∴ البعد بين المستويين = طول العمود

من (٠ ، ٠ ، ٤) إلى المستوى الثانى

= $\frac{|٤ (٠) + ٢ (٠) + ٤ (٤) + ٥|}{\sqrt{١٦ + ٤ + ١٦}}$

= $\frac{٢١}{٦}$ = ٣ $\frac{١}{٢}$ وحدة طول.

٢٧

بفرض (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ، ع$_{١}$) ∈ للمستوى ط$_{١}$

∴ المسافة بين المستويين = طول العمود المرسوم

من (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ، ع$_{١}$)

إلى المستوى ط$_{٢}$

∴ المسافة بين المستويين =

$\frac{|أ س_{١} + ب ص_{١} + حـ ع_{١} + ء_{٢}|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢}}}$

، من معادلة المستوى الأول

∴ أ س$_{١}$ + ب ص$_{١}$ + حـ ع$_{١}$ = − ء$_{١}$

∴ المسافة بين المستويين

= $\frac{|ء_{٢} - ء_{١}|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢}}}$ وحدة طول.

٢٨

∵ (١ ، −١ ، ٤) متجه اتجاه للمستقيم

، (١ ، ٥ ، ١) متجه اتجاه عمودى على المستوى

∵ (١ ، −١ ، ٤) . (١ ، ٥ ، ١) = ١ − ٥ + ٤ = ٠

∴ المستقيم يوازى المستوى

∵ (٢ ، −٢ ، ٣) ∈ للمستقيم ، معادلة المستوى هى

س + ٥ ص + ع − ٥ = ٠

∴ البعد بين المستقيم والمستوى

= طول العمود من (٢ ، −٢ ، ٣) إلى المستوى

= $\frac{|٥ + ٢ (-٢) + ٣ - ٥|}{\sqrt{١ + ٢٥ + ١}}$ = $\frac{١٠}{\sqrt{٢٧}}$ وحدة طول.

٢٩

① $\overrightarrow{أ ب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، −١ ، ٣) − (٠ ، −١ ، ١)

= (٢ ، ٠ ، ٢)

، $\overrightarrow{ب حـ}$ = $\overrightarrow{حـ}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (−١ ، −٢ ، ٣)

− (٢ ، −١ ، ٣) = (−٣ ، −١ ، −١)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ

= $\overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ}$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ -٣ & -١ & -١ \end{vmatrix}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$ − ٢ $\overrightarrow{ع}$

② معادلة المستوى أ ب حـ هى :

$\overrightarrow{ن}$. (٢ ، −٤ ، −٢) = (٠ ، −١ ، ١) . (٢ ، −٤ ، −٢)

٢ س − ٤ ص − ٢ ع + ٢ = ٠ .

∴ طول العمود من ء

= $\frac{|٢ (٧) - ٤ (-٤) - ٢ (-٢)|}{\sqrt{٤ + ١٦ + ٤}}$ = ٢ $\sqrt{٦}$ وحدة طول.

③ $\overrightarrow{ب ء}$ = (٧ ، −٤ ، ٢) − (٢ ، −١ ، ٣)

= (٥ ، −٣ ، −١)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى ب حـ ء

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٥ & -٣ & -١ \\ -٣ & -١ & -١ \end{vmatrix}$ = $\overrightarrow{ب ء} \times \overrightarrow{ب حـ}$

= (٢ ، ٨ ، −١٤)

، ∵ (متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ)

، (متجه الاتجاه العمودى على المستوى ب حـ ء)

= (٢ ، −٤ ، −٢) . (٢ ، ٨ ، −١٤) = صفر

∴ المستويان متعامدان.

٣٠

① المعادلة الإحداثية للمستوى س ب ص

$\begin{vmatrix} س - ١ & ص - ٤ & ع - ٢ \\ ١ & ١ - & ٠ \\ ٢ & ٤ - & ٥ \end{vmatrix}$ = ٠

∴ $\begin{vmatrix} (س - ١) & (ص - ٤) & (ع - ٢) \\ ٣ & ٤- & ٠ \\ ٢- & ٤ & ١- \end{vmatrix}$ = ٠

∴ −٣ (ص − ٤) − ٤ (ع − ٢) = ٠

∴ ٣ ص + ٤ ع − ٢٠ = ٠

② معادلة المستوى ص ب ء :

$\overrightarrow{ن}$. (١ ، ٢ ، ٣) = (٢ ، ٢ ، ٣) . (١ ، ٢ ، ٠)

∴ س + ٢ ص + ٢ ع − ١٢ = ٠

③ متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ

= $\overrightarrow{أ ب} \times \overrightarrow{ب حـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ -٣ & -١ & -١ \end{vmatrix}$

= (−١٠ ، −١٧ ، ١)

، ∵ متجه الاتجاه العمودى للمستوى أ ب حـ

= (٢ ، −٤ ، −٢)

∴ متجه اتجاه خط التقاطع

= (٢ ، −٤ ، −٢) × (−١٠ ، −١٧ ، ١)

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & -٤ & -٢ \\ -٢ & -٤ & ١ \\ ١ & -١٧ & -١٠ \end{vmatrix}$ = (−٣٨ ، ١٨ ، −٧٤)

، ∵ ب ∈ للمستويين

∴ معادلة خط التقاطع هى :

$\overrightarrow{ن}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (−٣٨ ، ١٨ ، −٧٤)

③ ∵ (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كلا المستويين

∴ ٣ (٠) + ٤ (ف) − ٢٠ = ٠

∴ ف = ٥

، ط + ٢ (٠) + ٢ (ف) − ١٢ = ٠

∴ ط = ٢

④ متجه الاتجاه لخط التقاطع

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = (-٢ ، ٤ ، -٣)$$

، ∵ (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كل من المستويين

∴ (٢ ، ٠ ، ٥) تقع فى خط التقاطع

∴ معادلة خط التقاطع هى :

$\overrightarrow{ر} = (٢ ، ٠ ، ٥) + ل (-٢ ، ٤ ، -٣)$

⑤ ∵ $\frac{|٣ (١) + ٤ (ن) - ٢٠|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

$= \frac{|١ + ٢ (١) + ٢ (ن) - ١٢|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}}$

∴ $\frac{|٤ ن - ١٧|}{٥} = \frac{|٢ ن - ٩|}{٣}$

∴ ٥ |٢ ن − ٩| = ٣ |٤ ن − ١٧|

∴ ٥ (٢ ن − ٩) = ± ٣ (٤ ن − ١٧)

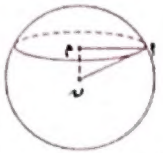
∴ ١٠ ن − ٤٥ = ١٢ ن − ٥١ ومنها ن = ٣

أ، ١٠ ن − ٤٥ = −١٢ ن + ٥١ ومنها ن = $\frac{٤٨}{١١}$

٣١

مركز الكرة هو ﻫ (٠ ، ١ ، ٢)

وطول نصف قطرها ﻫ أ



$= \sqrt{٢١ + ٢^{٢} + (-١١)^{٢}} = ٤$ وحدة طول.

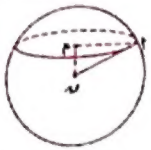
، عندما يقطع مستوى كرة فإن المقطع الناتج هو دائرة ويكون المستقيم الواصل بين مركزها ومركز الكرة عموديًا على مستوى الدائرة

∴ ﻫ م = طول العمود من ﻫ إلى المستوى

$= \frac{|٠ + ٢ (١) + ٢ (٢) - ١٥|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}} = ٣$ وحدة طول.

∴ نق للدائرة = $\sqrt{٢٤ - ٣^{٢}} = \sqrt{٧}$ وحدة طول.

٣٢



مركز الكرة هو ﻫ (-٣ ، -٢ ، ١)

، طول نصف قطرها أ ﻫ = $\sqrt{١٥}$

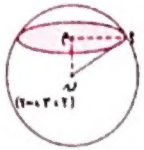
، ∵ ﻫ م = $\frac{|٢ (-٣) - (-٢) - ٢ (١) + ١٢|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤}}$

= ٢ وحدة طول.

∴ نق للدائرة = $\sqrt{١٥ - ٤} = \sqrt{١١}$ وحدة طول.

∴ مساحة المقطع الناتج = ١١ π وحدة مربعة.

٣٣



∵ محيط المقطع الناتج = ٨ π

∴ ٢ π نق = ٨ π

∴ نق للدائرة = ٤ وحدة طول

، ∵ طول العمود من ﻫ إلى المستوى

$= \frac{|٢ (٢) - ٢ (٣) + (-٢) - ٥|}{\sqrt{٢^{٢} (١) + ٢^{٢} (-٢) + ٢^{٢} (٢)}} = ٣$ وحدة طول.

∴ أ ﻫ = $\sqrt{٢^{٢} (٤) + ٢^{٢} (٣)} = ٥$ وحدة طول.

∴ نق للكرة = ٥ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هى

(س − ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} + (ع + ٢)^{٢} = ٢٥

٣٤

بفرض (س ، ص ، ع) أى نقطة فى المستوى المطلوب

، ∵ المستوى المطلوب ينصف الزاوية بين المستويين

ط$_{١}$: ٧ س + ص − ٦ = ٠ .

، ط$_{٢}$: ٣ س + ٥ ص − ٤ ع + ١ = ٠ .

∴ البعد العمودى من (س ، ص ، ع) إلى كل من المستويين متساوى

∴ $\frac{|٧ س + ص - ٦|}{\sqrt{١ + ٤٩}} = \frac{|٣ س + ٥ ص - ٤ ع + ١|}{\sqrt{١٦ + ٢٥ + ٩}}$

∴ ٧ س + ص − ٦ = ± (٣ س + ٥ ص − ٤ ع +

∴ ٧ س + ص − ٦ = ٣ س + ٥ ص − ٤ ع +

∴ ٤ س − ٤ ص + ٤ ع − ٧ = ٠ .

أ، ٧ س + ص − ٦ = −٣ س − ٥ ص + ٤ ع −

∴ ١٠ س + ٦ ص − ٤ ع − ٥ = ٠ .

أى أن هناك مستويين متعامدين أحدهما ينصف الزاوية الحادة بين المستويين ط$_{١}$ ، ط$_{٢}$ والآخر ينصف الزاوية المنفرجة بينهما.

③ ∵ (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كلا المستويين

∴ ٣ (٠) + ٤ (ف) − ٢٠ = ٠ .

∴ ف = ٥

، ط + ٢ (٠) + ٢ (ف) − ١٢ = ٠ .

∴ ط = ٢

④ متجه الاتجاه لخط التقاطع

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٢ & ٤ \\ ٠ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} = (-٢ ، ٤ ، -٣)$$

، ∵ (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كل من المستويين

∴ (٢ ، ٠ ، ٥) تقع فى خط التقاطع

∴ معادلة خط التقاطع هى :

$\overrightarrow{ر} = (٢ ، ٠ ، ٥) + ل (-٢ ، ٤ ، -٣)$

⑤ ∵ $\frac{|٣ (١) + ٤ (ن) - ٢٠|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

$= \frac{|١ + ٢ (١) + ٢ (ن) - ١٢|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}}$

∴ $\frac{|٤ ن - ١٧|}{٥} = \frac{|٢ ن - ٩|}{٣}$

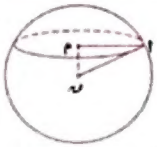
∴ ٥ |٢ ن − ٩| = ٣ |٤ ن − ١٧|

∴ ٥ (٢ ن − ٩) = ± ٣ (٤ ن − ١٧)

∴ ١٠ ن − ٤٥ = ١٢ ن − ٥١ ومنها ن = ٣

أ، ١٠ ن − ٤٥ = −١٢ ن + ٥١ ومنها ن = $\frac{٤٨}{١١}$

٣١



مركز الكرة هو ن (٠ ، ١ ، ٢)

وطول نصف قطرها ؟ ن

$= \sqrt{٢١ + ٢^٢ - (-١١)} = ٤$ وحدة طول.

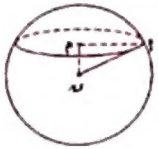
، عندما يقطع مستوى كرة فإن المقطع الناتج هو دائرة ويكون المستقيم الواصل بين مركزها ومركز الكرة عموديًا على مستوى الدائرة

∴ م ن = طول العمود من ن إلى المستوى

$= \frac{|٠ + ٢ (١) + ٢ (٢) - ١٥|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}} = ٣$ وحدة طول.

∴ نق للدائرة = $\sqrt{٤^٢ - ٣^٢} = \sqrt{٧}$ وحدة طول.

٣٢



مركز الكرة هو ن (−٣ ، −٢ ، ١)

، طول نصف قطرها ؟ ن = $\sqrt{١٥}$

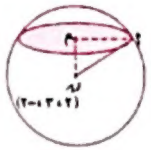
، ∵ م ن = $\frac{|٢ (-٣) - (-٢) - ٢ (١) + ١٢|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤}}$

= ٢ وحدة طول.

∴ نق للدائرة = $\sqrt{١٥ - ٤} = \sqrt{١١}$ وحدة طول.

∴ مساحة المقطع الناتج = ١١ π وحدة مربعة.

٣٣



∵ محيط المقطع الناتج = ٨ π

∴ ٢ π نق = ٨ π

∴ نق للدائرة = ٤ وحدة طول

، ∵ طول العمود من ن إلى المستوى

$= \frac{|٢ (٢) - ٢ (٣) + (-٢) - ٥|}{\sqrt{(٢)^٢ + (-٢)^٢ + (١)^٢}} = ٣$ وحدة طول.

∴ ؟ ن = $\sqrt{(٤)^٢ + (٣)^٢} = ٥$ وحدة طول.

∴ نق للكرة = ٥ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هى

$(س - ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع + ٢)^٢ = ٢٥$

٣٤

بفرض (س ، ص ، ع) أى نقطة فى المستوى المطلوب

، ∵ المستوى المطلوب ينصف الزاوية بين المستويين

$ط_١$: ٧ س + ص − ٦ = ٠ .

، $ط_٢$: ٣ س + ٥ ص − ٤ ع + ١ = ٠ .

∴ البعد العمودى من (س ، ص ، ع) إلى كل من المستويين متساوى

∴ $\frac{|٧ س + ص - ٦|}{\sqrt{١ + ٤٩}} = \frac{|٣ س + ٥ ص - ٤ ع + ١|}{\sqrt{١٦ + ٢٥ + ٩}}$

∴ ٧ س + ص − ٦ = ± (٣ س + ٥ ص − ٤ ع + ١)

∴ ٧ س + ص − ٦ = ٣ س + ٥ ص − ٤ ع + ١

∴ ٤ س − ٤ ص + ٤ ع − ٧ = ٠ .

أ، ٧ س + ص − ٦ = −٣ س − ٥ ص + ٤ ع − ١

∴ ١٠ س + ٦ ص − ٤ ع − ٥ = ٠ .

أى أن هناك مستويين متعامدين أحدهما ينصف الزاوية الحادة بين المستويين $ط_١$ ، $ط_٢$ والآخر ينصف الزاوية المنفرجة بينهما.

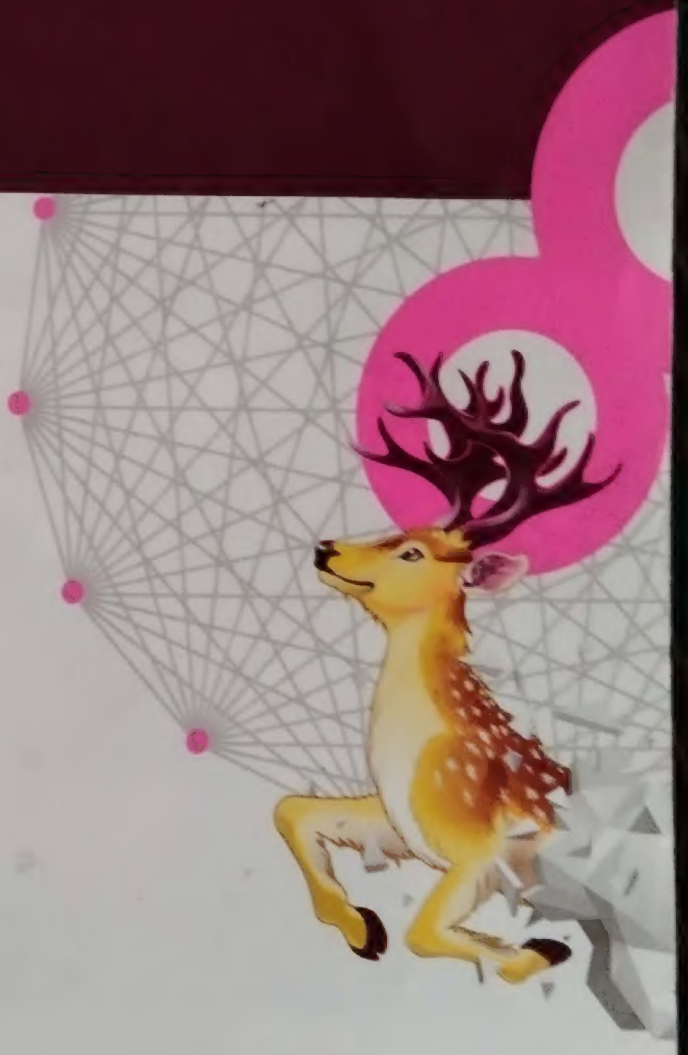
الجبر و الهندسة الفراغية

الرياضيات البحتة

الآن بالمكتبات

المعاصر في

- التفاضل و التكامل
- الاستاتيكا
- الديناميكا
- اللغة الإنجليزية
- اللغة الفرنسية



الجزء الخاص بالإجابات
يصرف مجانًا مع الكتاب

مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقي-الفجالة
تليفون ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٢٥٩٣٤٠٣
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com
الخط الساخن ١٥٠١٤

/ElMoasser.eg

6 223007 310642